Различные подходы к решению задач С1, С3, С5 ЕГЭ 2009-2010 года.

Подготовка к ЕГЭ 2011.

(*материал для лекции для учителей* 22.11.2010)

Прокофьев А.А., aaprokof@yandex.ru

Задачи С1

Пример 1. (ЕГЭ 2010, С1). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} y-\sin x=0, \\ (3\sqrt{\sin x}-1)(7y+3)=0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю, а второй при этом имеет смысл. Следовательно,

$$(3\sqrt{\sin x}-1)(7y+3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 7y+3=0, \\ \sin x \geq 0; \end{cases} & (1) \\ 3\sqrt{\sin x}-1=0. & (2) \end{array} \right.$$

В случае (1) получаем $y=-\dfrac{3}{7}$. Тогда из первого уравнения данной в условии системы следует $\sin x=-\dfrac{3}{7}$, что противоречит условию $\sin x \geq 0$. Следовательно, в этом случае система не имеет решения.

В случае (2) получаем $\sqrt{\sin x}=\dfrac{1}{3}$, т.е. $\sin x=\dfrac{1}{9}$. Отсюда $x=(-1)^n \arcsin\dfrac{1}{9}+\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Из первого уравнения данной в условии системы следует, что в этом случае $y=\dfrac{1}{9}$.

Ответ. $\left((-1)^n \arcsin\dfrac{1}{9}+\pi n, \dfrac{1}{9}\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. (ЕГЭ 2010, С1). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x} - 14\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 = 0, \\ 3\sqrt{y}\ \operatorname{tg} x - 5\sqrt{2}\cos x = 0. \end{cases}.$$

Решение. Заметим, что его левая часть первого уравнения представляет полный квадрат:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x} - 14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\operatorname{tg} x} - 14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 = \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} - 7\right)^2.$$

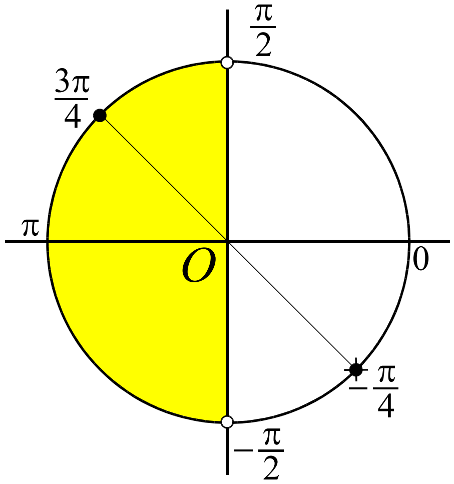


Рис. 1

Равенство нулю возможно, если $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} - 7 = 0$, т.е. $7^{-\operatorname{tg} x} = 7$. Отсюда получаем $\operatorname{tg} x = -1$. Тогда $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим второе уравнение системы. Запишем его в виде $\sqrt{y} = \dfrac{5\sqrt{2}\cos x}{3\operatorname{tg} x}$. Так как правая часть этого уравнения должна быть неотрицательна и, учитывая, что $\operatorname{tg} x = -1$, получаем, что $\cos x < 0$ (рис. 1). Тогда из множества решений $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, выбираем значения, лежащие во второй четверти, т.е. $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

В этом случае $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sqrt{y} = \dfrac{5\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3(-1)} = \dfrac{5}{3}$. Отсюда $y = \dfrac{25}{9}$.

Ответ. $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, \dfrac{25}{9}\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 3. (ЕГЭ 2010, С1). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{16\sin^4 x-9}{\sqrt{\cos x}}=0, \\ \sqrt{y+6}+2\sin x=0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Так как $\sqrt{y+6}=-2\sin x$, то правая часть должна быть неотрицательна. Следовательно, $\sin x \le 0$.

Первое уравнение системы равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 16\sin^4 x-9=0, \\ \cos x>0, \end{cases}$$

поскольку дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и отличен от нуля.

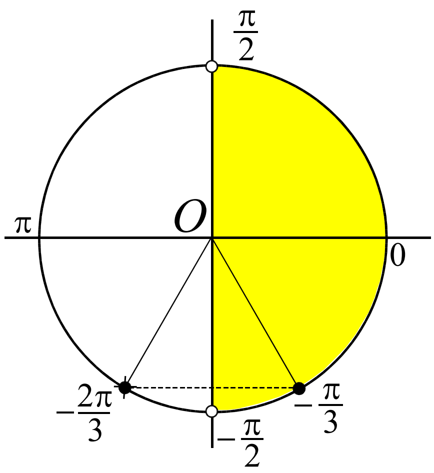


Рис. 2

Из уравнения $\sin^4 x=\dfrac{9}{16}$ с учетом условия $\sin x \le 0$ получаем $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда получаем две серии решений $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Из этих серий отбираем ту, для которой $\cos x>0$ (рис. 2), т.е. $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$.

Тогда, подставляя $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в уравнение $\sqrt{y+6}=-2\sin x$ получаем $\sqrt{y+6}=\sqrt{3}$. Отсюда $y=-3$.

Ответ. $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\,-3\right)$, где $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 4. (Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ 2011, С1).

Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x + 2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$

Решение. Поскольку дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и отличен от нуля, то данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \sin 2x + 2\sin^2 x = 0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Используя формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получим

$$2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x(\cos x + \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -1. \end{array}\right.$$

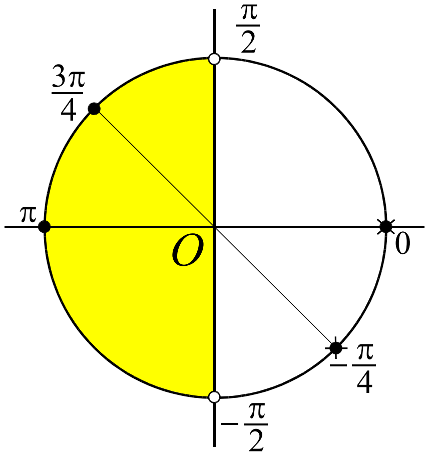


Рис. 3

Получаем две серии решений $x = \pi n$ или $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Отсюда отбираем, те значения x, при которых $\cos x < 0$ (рис. 3), т.е. $x = \pi + 2\pi n$ и $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\pi + 2\pi n, \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Задачи С3

Пример 1. (Из сборника задач С3, ЕГЭ 2011). *Решите неравенство*

$$\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x)\ge 1.$$

Решение. Запишем неравенство в следующей форме

$$\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x)\ge \log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-\cos x).$$

Это неравенство будет равносильно исходному и равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\sin x-\cos x>1,\\ \sin x-5\cos x\ge \sin x-\cos x;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}0<\sin x-\cos x<1,\\ \sin x-5\cos x>0,\\ \sin x-5\cos x\le \sin x-\cos x.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим (1). Заметим, что $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,\ \text{где } n\in\mathbf{Z}.$$

Решим (2). Заметим, что $(2)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}0<\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin x-5\cos x>0,\\ \cos x\ge 0.\end{cases}$

Решим сначала отдельно первое и третье неравенство этой системы:

$$0<\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+2\pi n,\\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ \pi+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\end{array}\right.\ \text{где } n\in\mathbf{Z}.$$

$$\cos x\ge 0\ \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \text{где } n\in\mathbf{Z}.$$

Пересечением множества решений этих двух неравенств является множество $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. Тогда для неравенства $\sin x - 5\cos x > 0$ с учетом полученного множества (x принадлежит 1-й четверти) получаем: $\operatorname{tg} x > 5$, т.е. $\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Объединяя решения (1) и (2), получаем ответ.

Ответ. $\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 2. (ЕГЭ 2010, С3). *Решите неравенство*

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>\log_5\left(7^{2-x^2}-1\right)^2.$$

Решение. В соответствии с определение логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)>0,\\ 7^{2-x^2}-1\neq 0.\end{cases}$$

Сделав замену $t=7^{-x^2}$. Так как $-x^2\le 0$, то по свойству степени с основанием больше единицы $0<7^{-x^2}\le 7^0=1$. Отсюда $0<t\le 1$. С учетом последнего неравенства, запишем полученную выше систему

$$\begin{cases}(t-5)\left(7^{16}t-1\right)>0,\\ 7^2t-1\neq 0,\\ 0<t\le 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 0<t<7^{-16}.$$

Исходное неравенство с переменной t будет иметь вид

$$\log_5\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_5\frac{t-5}{7^{16}t-1}>\log_5(49t-1)^2,\text{ где } 0<t<7^{-16}.$$

Используя свойство логарифма (при допустимых значениях переменной сумма логарифмов с одинаковым основанием равна логарифму произведения), получим

$$\log_5(t-5)^2>\log_5\left(7^2t-1\right)^2\quad\Leftrightarrow\quad (t-5)^2>(49t-1)^2,$$

так как $(t-5)^2>0$ и $(49t-1)^2>0$ при $0<t\le 7^{-16}$. Решим последнее неравенство:

$$(t-5)^2>(49t-1)^2\quad\Leftrightarrow\quad (t-5)^2-(49t-1)^2>0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \left((t-5)-(49t-1)\right)\left((t-5)+(49t-1)\right)>0\ \Leftrightarrow\ (48t+4)(50t-6)<0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{12}<t<\frac{3}{25}.$$

С учетом ограничения на t получаем $0<t<7^{-16}$.

Выполнив обратную замену, имеем $7^{-x^2}<7^{-16}$. Отсюда $x^2>16$, т.е. $x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Пример 3. (ЕГЭ 2010, С3). *Решите неравенство*

$$\frac{\log_{3^{x+3}} 9}{\log_{3^{x+3}}(-9x)} \le \frac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}.$$

Решение. В соответствии с определение логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases} 3^{x+3} \ne 1, \\ -9x > 0, \\ -9x \ne 1, \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x > 0, \\ \log_{\frac{1}{3}} 3^x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -3, \\ x < 0, \\ x \ne -\dfrac{1}{9}, \\ 3^x < 1, \\ 3^x \ne 3^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -3, \\ x < 0, \\ x \ne -\dfrac{1}{9}, \\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{9}; 0\right).$$

Так как по свойствам логарифма справедливы равенства:

$$\log_{\frac{1}{3}} 3^x = -\log_3 3^x = -x, \ \log_{3^{x+3}} 9 = \frac{1}{x+3} \cdot \log_3 9 = \frac{2}{x+3} \text{ и}$$

$$\log_{3^{x+3}}(-9x) = \frac{1}{x+3} \cdot \log_3(-9x) = \frac{\log_3(-x)+2}{x+3},$$

то исходное неравенство при допустимых значениях переменной x можно привести к виду

$$\frac{2}{(x+3)\cdot\dfrac{\log_3(-x)+2}{x+3}} \le \frac{1}{\log_3(-x)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\log_3(-x)+2} \le \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

Сделав замену $t = \log_3(-x)$, получим неравенство

$$\frac{2}{t+2} \le \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{t+2} - \frac{1}{t} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t-2}{t(t+2)} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t < -2, \\ 0 < t \le 2. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, имеем

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < -2, \\ 0 < \log_3(-x) \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(-x) < \log_3 \dfrac{1}{9}, \\ \log_3 1 < \log_3(-x) \le \log_3 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{9} < x < 0, \\ -9 \le x < -1. \end{array}\right.$$

Отсюда $x \in [-9; -1) \cup \left(-\frac{1}{9}; 0\right)$. С учетом ограничений на x, полученных выше, запишем ответ.

Ответ. $[-9; -3) \cup (-3; -1) \cup \left(-\frac{1}{9}; 0\right)$.

Пример 4. (ЕГЭ 2010, С3). *Решите неравенство*

$$\frac{1}{\log_{2^x-1} 2}\cdot\log_{\sqrt{2}}(4^{x+1}-2^{x+3}+4)<80.$$

Решение. В соответствии с определение логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}2^x-1>0,\\ 2^x-1\neq 1,\\ 4^{x+1}-2^{x+3}+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x>1,\\ 2^x\neq 2,\\ 4(2^x-2\cdot 2^x+1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ 4(2^x-1)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in(0;\,1)\cup(1;\,+\infty).$$

Так как по свойствам логарифма справедливы равенства:

$$\frac{1}{\log_{2^x-1} 2}=\log_2(2^x-1),$$

$$\log_{\sqrt{2}}(4^{x+1}-2^{x+3}+4)=2\log_2\left(4\cdot(2^x-1)^2\right)=4+4\log_2(2^x-1),$$

то исходное неравенство при допустимых значениях переменной x приводится к виду

$$\log_2(2^x-1)\cdot\left(4+4\log_2(2^x-1)\right)<80.$$

Сделав замену $t=\log_2(2^x-1)$, получим неравенство

$$t(4+4t)<80 \quad\Leftrightarrow\quad t^2+t-20<0 \quad\Leftrightarrow\quad -5<t<4.$$

Выполнив обратную замену, имеем

$$-5<\log_2(2^x-1)<4 \quad\Leftrightarrow\quad 2^{-5}<2^x-1<2^4 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{33}{32}<2^x<17 \quad\Leftrightarrow\quad \log_2\frac{33}{32}<x<\log_2 17.$$

С учетом условия $x\in(0;\,1)\cup(1;\,+\infty)$ получаем ответ $x\in\left(\log_2\frac{33}{32};\,1\right)\cup(\log_2 17;\,+\infty)$.

Ответ. $\left(\log_2\frac{33}{32};\,1\right)\cup(\log_2 17;\,+\infty)$.

Пример 5. (ЕГЭ 2010, С3). *Решите неравенство*

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

Решение. В соответствии с определение логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases} |x| \ne 0, \\ 2^{x-1} \ne 1, \\ x+7>0, \\ x+7 \ne 1, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x-1 \ne 0, \\ x>-7, \\ x \ne -6, \\ x>-12 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-7;-6) \cup (-6;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty).$$

Так как по свойствам логарифма справедливы равенства: $\dfrac{\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} = \log_{x+7}|x|$ и $\dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)} = \log_{x+7}(x+12)$, то исходное неравенство при допустимых значениях переменной x приводится к виду

$$2\log_{x+7}|x| \le \log_{x+7}(x+12) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{x+7}x^2 \le \log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+7<1, \\ x^2 \ge x+12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>1, \\ x \ne 0, \\ x^2 \le x+12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ x^2-x-12 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ x \ne 0, \\ x^2-x-12 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ (x-4)(x+3) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ x \ne 0, \\ (x-4)(x+3) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -3 \le x<0, \\ 0<x \le 4. \end{array}\right.$$

С учетом условия $x \in (-7;-6) \cup (-6;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty)$ получаем ответ $x \in (-7;-6) \cup [-3;0) \cup (0;1) \cup (1;4]$.

Ответ. $(-7;-6) \cup [-3;0) \cup (0;1) \cup (1;4]$.

Пример 6. (Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ 2011, С3). *Решите неравенство*

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le\frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение. Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x\ne-2$ и $x\ne3$.

При всех остальных x неравенство равносильно следующему

$$2(x-3)^2(x-1)^2+2(x+2)^2(x+1)^2\le(2x^2-x+5)^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2(x^2-4x+3)^2+2(x^2+3x+2)^2\le(2x^2-x+5)^2.$$

Заметим, что $2x^2-x+5=(x^2-4x+3)+(x^2+3x+2)$.

Пусть $u=x^2-4x+3$ и $v=x^2+3x+2$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$2u^2+2v^2\le(u+v)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2u^2+2v^2\le u^2+2uv+v^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2-2uv+v^2\le0 \quad\Leftrightarrow\quad (u-v)^2\le0.$$

Отсюда следует, что $u=v$. Выполняя обратную замену, получаем

$$x^2-4x+3=x^2+3x+2\text{, т.е. } x=\frac{1}{7}.$$

Ответ. $\frac{1}{7}$.

Пример 7. (Из сборника задач С3, ЕГЭ 20110). *Решите неравенство*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(x^2-2x-15\right)^{3/2}} 7^{(x+3)^2(x-5)} \le 1.$$

Решение. ОДЗ находим из условия $x^2-2x-15\ge 0$, т.е. $x\le -3$ и $x\ge 5$. Рассмотрим данное неравенство на двух промежутках:
1) $x\le -3$ и 2) $x\ge 5$.
1. При $x\le -3$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{-x-3}}\le 1.$$

Поскольку при $x\le -3$ верны неравенства

$$-x-3\ge 0,\ \sqrt{x^2-2x-15}\ge 0,\ 7^{x^2-2x-15}\ge 1,\ 2^{x^2-2x-15}\ge 1,$$

то в этом случае левая часть неравенства меньше либо равна 1 для любого значения x из этого промежутка.

2. При $x\ge 5$ верно неравенство $x+3>\sqrt{x^2-2x-15}$ (поскольку в этом случае $x+3>\sqrt{x^2-2x-15}$ $\Leftrightarrow$ $x^2+6x+9>x^2-2x-15$ $\Leftrightarrow$ $x>-3$). Так как $7^{x^2-2x-15}\ge 2^{x^2-2x-15}\ge 1$ (основания больше единицы, показатели степени положительны), то и $\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}\ge\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}$, причем при всех $x>5$ справедливо строгое неравенство. Тогда

при $x>5$ $\dfrac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}>1$ и при $x=5$ имеет $\dfrac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}}=1$.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ. $x\le -3$ и $x=5$.

Задачи С5

I. Пример 1. (ЕГЭ, 2010, С5). *Найдите все значения* a, *при каждом из которых функция* $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$ *имеет более двух точек экстремума.*

Решение. (*1-й способ, предложенный в критериях*). 1. Функция f имеет вид: а) при $x \ge a^2$: $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$;

б) при $x \le a^2$: $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 1):

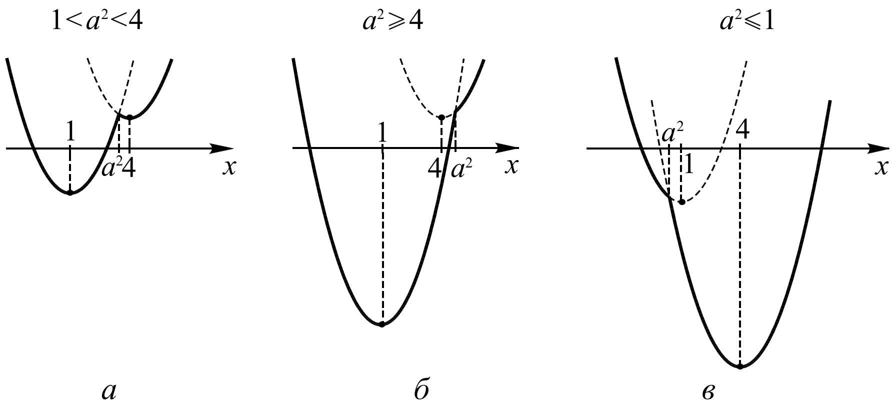


Рис. 1

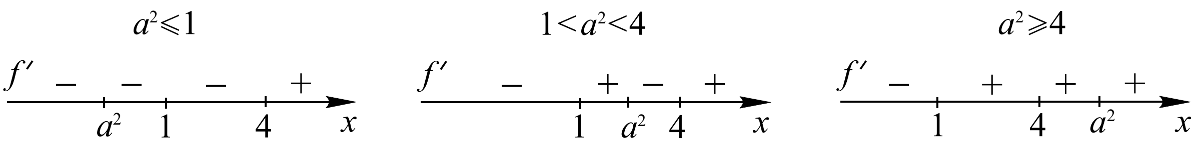
2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2, f(a^2))$, где $f(a^2) = a^4 - 5a^2$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. 1*а*): $1 < a^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < |a| < 2$.

Решение. (*2-й способ*). 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Раскрывая модуль при каждом фиксированном значении параметра a, получаем $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ при $x \ge a^2$ и $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ при $x \le a^2$.

Производная функции равна $f'(x) = 2x - 8$ при $x > a^2$ и $f'(x) = 2x - 2$ при $x < a^2$. В точке $x = a^2$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 8 = 2x - 2$ не выполняется ни при каком значении x. Используя достаточное условие существования экстремума, найдем все такие значения a, при которых найдется более двух точек, в которых производная равна нулю или не существует и при переходе через которые ее производная меняет знак.

Производная функции не существует в точке $x = a^2$ и может равняться нулю в точках $x = 1$ и $x = 4$ при соответствующем расположении их относительно $x = a^2$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (рис. 2).



а *б* *в*

Рис. 2

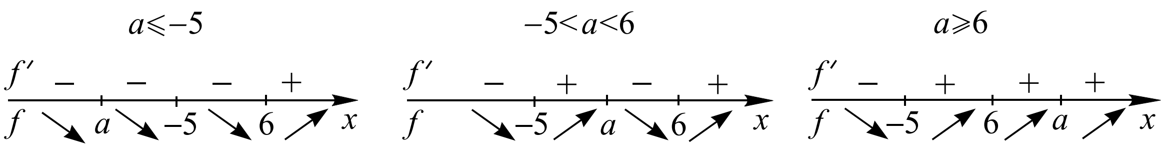
Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. 2*б*): $1 < a^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < |a| < 2$.

Ответ. $-2 < a < -1; 1 < a < 2$.

Пример 2. (ЕГЭ 2010, вторая волна, С5). *Найдите все значения* a, *при каждом из которых наибольшее значение функции* $f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$ *на отрезке* $[-8; 7]$ *не принимается ни на одном из концов этого отрезка.*

Решение. 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой, и имеет вид: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 11a, \text{ если } x \ge a, \\ x^2 + 10x - 11a, \text{ если } x \le a. \end{cases}$

2. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 12$ при $x > a$ и $f'(x) = 2x + 10$ при $x < a$. Отметим, что в точке $x = a$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 12 = 2x + 10$ не выполняется ни при каком значении x. Производная функции не существует в точке $x = a$ и может равняться нулю в точках $x = -5$ и $x = 6$ при соответствующе расположении их относительно $x = a$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (рис. 3) и характер поведения функции на каждом из промежутков числовой прямой, на которые точки $x = a$, $x = -5$ и $x = 6$ ее разбили.



а *б* *в*

Рис. 3

3. Условию задачи удовлетворяет только случай $-5 < a < 6$, соответствующий рис. 3*б*, при выполнении условий

$$\begin{cases} f(-8) < f(a), \\ f(7) < f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-8)^2 + 10\cdot(-8) - 11a < a^2 - a, \\ (7)^2 - 12\cdot(7) + 11a < a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 16 > 0, \\ a^2 - 12a + 35 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+8)(a+2) > 0, \\ (a-5)(a-7) > 0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $-5 < a < 6$ получаем $-2 < a < 5$.

Ответ. $-2 < a < 5$.

Пример 3. (ЕГЭ, 2010, первая волна, С5). *Найдите все значения параметра* a, *при каждом из которых наименьшее значение функции* $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ *меньше* 1.

Решение. (*1-й способ, предложенный в критериях*). 1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2-6x+8\ge 0$: $f(x)=x^2+(2a-6)x+8$, поэтому ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3-a$;

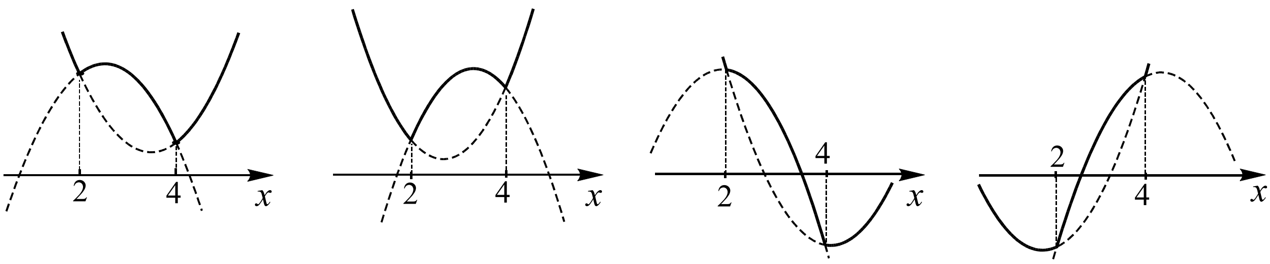
б) при $x^2-6x+8<0$: $f(x)=-x^2+(2a+6)x-8$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3+a$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 4 *а*, *б*, *в*, *г*):

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принимать только в точках $x=2$ или $x=4$, а если $3-a\notin[2;4]$, то в точке $x=3-a$.

3. Наименьшее значение функция $f(x)$ меньше единицы тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l} f(2)<1, \\ f(4)<1, \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3-a<2, \\ 3-a>4, \end{array}\right. \\ f(3-a)<1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a<1, \\ 8a<1, \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<-1, \end{array}\right. \\ |3-a|>\sqrt{7} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<\dfrac{1}{4}, \\ a>3+\sqrt{7}. \end{array}\right.$$



а *б* *в* *г*

Рис. 4

Решение. (*2-й способ*). При каждом фиксированном значении параметра a, функция $y_a(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ определена на всей числовой прямой и является непрерывной на всей области определения. Функция задается формулой $y_a(x) = x^2 - (6 - 2a)x + 8$ при $x \le 2$ и $x \ge 4$, а при $2 \le x \le 4$ $y_a(x) = -x^2 + (6 + 2a)x - 8$. На каждом из промежутков $(-\infty; 2]$, $[2; 4]$ и $[4; +\infty)$ функция $y_a(x)$ является ограниченной снизу.

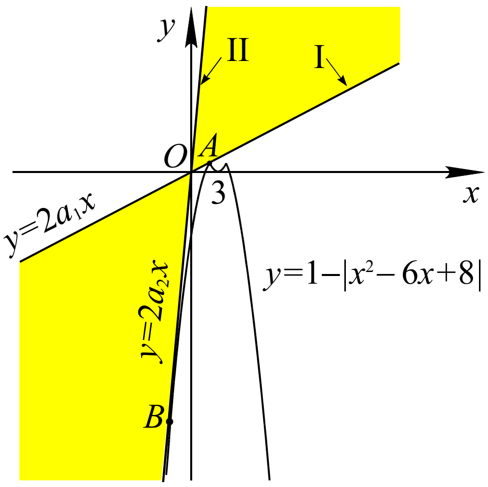


Рис. 5

Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все такие значения параметра a, при которых неравенство $y_a(x) < 1$ или

$$2ax + |x^2 - 6x + 8| < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2ax < 1 - |x^2 - 6x + 8|$$

имеет хотя бы одно решение, т.е. график функции $g(x) = 1 - |x^2 - 6x + 8|$ расположен выше графика функции $y = 2ax$ хотя бы при одном значении x.

Построим на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (рис. 5). Равенство $y = 2ax$ задает на плоскости Oxy семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.

(I) График функции $y = 2a_1x$ проходит через точку $A(2; 1)$ как указано на рис. 5. Из уравнения $2a_1x = 1$ при $x = 2$ получаем угловой коэффициент первой прямой $k_1 = 2a_1 = 0{,}5$.

(II) График функции $y = 2a_2x$ касается графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ на промежутке $(-\infty; 2]$, т.е. проходит через точку B как указано на рис. 5. Из условия касания найдем угловой коэффициент второй прямой:

$$\begin{cases} g'(x_0) = y'(x_0), \\ g(x_0) = y(x_0), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0 + 6 = 2a_2, \\ -x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2a_2x_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{7}, \\ 2a_2 = 6 + 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Отсюда имеем угловой коэффициент второй прямой $k_2 = 2a_2 = 2\sqrt{7} + 6$.

Рассматриваемое неравенство не будет иметь решение при $k_1 \le k \le k_2$, $0{,}5 \le 2a \le 2\sqrt{7} + 6$, $0{,}25 \le a \le \sqrt{7} + 3$, т.е. прямые расположены в выделенной фоном области на рис. 5. Соответственно, решение будет существовать при $a \in (-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0{,}25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Пример 4. (ЕГЭ 2010, пересдача, С5). *Найдите все значения* a*, при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат имеет нечетное число общих точек с графиком функции* $f(x) = (2a-3)x - (x+3)\,|\,x-a\,|$.

Решение. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой, и имеет вид:

а) при $x \ge a$: $f(x) = -x^2 + 3(a-2)x + 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \dfrac{3a}{2} - 3$;

б) при $x \le a$: $f(x) = x^2 + ax - 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -\dfrac{a}{2}$.

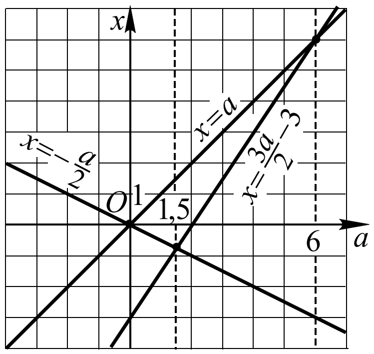
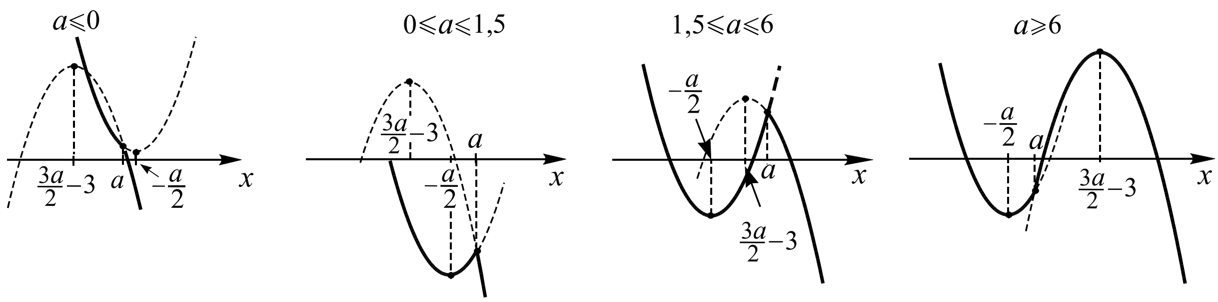


Рис. 6

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a, f(a))$, где $f(a) = 2a^2 - 3a$.

На рис. 6 представлено взаимное расположение чисел $-\dfrac{a}{2}$, a, $\dfrac{3a}{2} - 3$ на координатной оси Ox при каждом значении параметра a. Прямые $a = 0$, $a = 1{,}5$ и $a = 6$, соответствующие точкам пересечения изображенных прямых, разбивают ось параметров a на четыре промежутка. Отсюда следует, что необходимо рассмотреть четыре случая взаимного расположения парабол.

На рис. 7 представлены все возможные виды графика функции $f(x)$ (сплошная линия). Условию задачи удовлетворяет только случай, соответствующий значениям $a \le 0$ (рис. 7*а*). В этом случае прямая, перпендикулярная оси ординат, будет иметь одну общую точку с графиком функции $f(x)$. В остальных случаях найдутся значения параметра, при которых будет две общие точки с графиком функции, т.е. четное число.



а *б* *в* *г*

Рис. 7

Ответ. $a \le 0$.

II. Теперь рассмотрим задачи с параметрами, в которых требуется установить значения параметра, при которых уравнение (система или неравенство) имеет «*единственное решение*», «*чётное число решений*» или «*нечётное число решений*». Иногда подобные задачи имеют характерную особенность: их условия не изменяются либо при замене знака одной или нескольких переменных на противоположный (*«симметрия относительно знака»*), либо при перестановке нескольких переменных (*«симметрия относительно перестановки переменных»*).

Для чётной функции $f(x)$ наблюдается «симметрия относительно знака» переменной x, так как в этом случае $f(x) = f(-x)$.

При исследовании на «симметрию относительно знака» в выражении $F(x, y)$ для пары (x, y) проверяются подстановкой в него пары $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. Если при подстановке пар (x, y) и $(-x, y)$ выражение не меняется, то говорят, что наблюдается «симметрия относительно знака» переменной x; для пар (x, y) и $(x, -y)$ – «симметрия относительно знака» переменной y; для пар (x, y) и $(-x, -y)$ – «симметрия относительно знаков» обеих переменных. Например, в выражении $F(x, y) = x^2 + y|x| - y^3$ подставляя пары (x, y) и $(-x, y)$ получаем

$$F(-x, y) = (-x)^2 + y|-x| - y^3 = x^2 + y|x| - y^3 = F(x, y);$$

При исследовании на «симметрию относительно перестановки переменных» для пары (x, y) проверяется подстановкой в исходное выражение пара (y, x). Например, для выражения $G(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ получаем

$$G(y, x) = y^3 - 3yx + x^3 = x^3 - 3xy + y^3 = G(x, y).$$

Соответственно в некоторых выражениях наблюдается «симметрия» относительно и перестановки переменных и изменения у них знака. В этих случаях для пары (x, y) проверяются подстановкой в исходное выражение пары $(-y, x)$, $(y, -x)$, $(-y, -x)$.

При решении задач указанного вида используется следующий порядок действий:

во-первых, выполняется проверка на симметрию;

во-вторых, из проверки выполнения *необходимых условий* находятся допустимые значения параметра (при «симметрии относительно знака» переменной подставляется ее нулевое значение; при «симметрии относительно перестановки» переменных все переменные обозначают одной буквой);

в-третьих, проверяется *достаточность условий*, т.е. для найденных допустимых значений параметра выполняется проверка того, что при полученных значениях параметра уравнение (система и т.д.) действительно имеет требуемое число решений.

Замечание. Последний этап заключается либо в доказательстве существования требуемого числа решений, либо в его опровержении.

Для иллюстрации приведенного алгоритма начнем с решения уравнений.

Пример 1. (ЕГЭ 2010, С5). *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$x^2+(a+4)^2=|x+a+4|+|x-a-4|$$

имеет единственный корень.

Решение. При каждом конкретном значении параметра a функции $f(x)=x^2+(a+4)^2$ и $g(x)=|x+a+4|+|x-a-4|$, входящие в левую и правую части уравнения, являются чётными, поскольку выполняются условия:

1) они определены на всей числовой прямой (области определения симметричны относительно начала координат);

2) $f(-x)=(-x)^2+(a+4)^2=x^2+(a+4)^2=f(x)$,

$g(-x)=|-x+a+4|+|-x-a-4|=|x-a-4|+|x+a+4|=g(x)$.

Следовательно, если число x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, то число $-x_0$ также будет являться корнем этого уравнения. Условие единственности будет выполняться, если $x=0$ – корень уравнения $f(x)=g(x)$ и других корней нет.

Подставив в исходное уравнение значение $x=0$, получим уравнение относительно параметра a:

$$(a+4)^2=|a+4|+|-a-4| \quad \Leftrightarrow \quad (a+4)^2-2|a+4|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a+4|=0, \\ |a+4|-2=0. \end{cases}.$$

Отсюда получаем три значения параметра $a=-6$, $a=-4$ и $a=-2$.

Пусть $a=-6$. Подставив $a=-6$ в исходное уравнение, получим $x^2+4=|x-2|+|x+2|$. Правая часть этого уравнения после раскрытия на промежутках модулей имеет вид

$$|x-2|+|x+2|=\begin{cases} -2x, \text{ если } x<-2, \\ 4, \text{ если } -2\le x<2, \\ 2x, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$$

Уравнения $x^2+4=-2x$ и $x^2+4=2x$ не имеют корней, а уравнение $x^2+4=4$ имеет единственный корень $x=0$, удовлетворяющий условию $-2\le x<2$.

Пусть $a=-2$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, опять получим уравнение $x^2+4=|x+2|+|x-2|$, имеющее единственный корень $x=0$.

Пусть $a=-4$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим

$$x^2=2|x| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x|=0, \\ |x|=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x=0,\, x=-2,\, x=2.$$

Значение $a=-4$ не соответствует условию задачи.

Ответ. $-6, -2$.

Продемонстрируем теперь применение предложенного выше алгоритма для решения систем уравнений и неравенств.

Пример 2. (ЕГЭ-2011, демонстрационный вариант, С5). *Найдите все значения параметра* a*, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} a(x^4+1) = y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений, то пара $(-x_0, y_0)$ – также её решение. Следовательно, для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось равенство $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Подставив это значение неизвестной x в систему, получим:

$$\begin{cases} a = y+2, \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4, \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} a=0, \\ y=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Допустимыми значениями параметра являются лишь значения $a=0$ и $a=4$.

Пусть $a=0$. Тогда исходная система уравнений примет вид: $\begin{cases} y=|x|-2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Подставив y из первого уравнения системы во второе, получим

$$x^2+(|x|-2)^2=4 \text{ или } x^2=2|x|.$$

Это уравнение имеет три корня $x=0, x=-2$ и $x=2$. Следовательно, при $a=0$ данная в условии система уравнений имеет три пары решений $(0; -2), (-2; 0)$ и $(2; 0)$.

Пусть $a=4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 4(x^4+1) = y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=4x^4+|x|+2, \\ y^2=4-x^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы следует $y \geq 2$, а из второго $|y| \leq 2$. Следовательно, если система имеет решение, то это пары вида $(x, 2)$. Подставляя $y=2$ в систему, получаем

$$\begin{cases} 4x^4+|x|=0, \\ x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Следовательно, при $a=4$ решение $(0; 2)$ исходной системы уравнений единственное.

Ответ. $a=4$.

Пример 3. *Найдите все значения параметра* a*, при которых система неравенств*

$$\begin{cases} y \le ax - x^2 - 3, \\ x \le ay - y^2 - 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что если при некотором значении параметра a пара чисел (x_0, y_0) является решением данной системы неравенств, то пара (y_0, x_0) – также решения, поскольку при подстановке второй пары уравнения системы остаются теми же, но меняются местами. Следовательно, необходимым условием единственности решения является совпадение этих пар. Если $(x_0, y_0) = (y_0, x_0)$, то $x_0 = y_0$.

Подставляя $x_0 = y_0$ в систему, получим, что каждое неравенство примет вид

$$x_0 \le ax_0 - x_0^2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2 + (1-a)x_0 + 3 \le 0,$$

которое будет иметь единственное решение в случае, если дискриминант D соответствующего квадратного трехчлена равен 0, т.е. $D = (1-a)^2 - 12 = 0$. Решая уравнение $a^2 - 2a - 11 = 0$, получаем два значения параметра $a = 1 - 2\sqrt{3}$ и $a = 1 + 2\sqrt{3}$.

Подставляя $a = 1 - 2\sqrt{3}$ в систему неравенств, получаем

$$\begin{cases} y \le (1-2\sqrt{3})x - x^2 - 3, \\ x \le (1-2\sqrt{3})y - y^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1-2\sqrt{3})x + y + 3 \le 0, \\ y^2 - (1-2\sqrt{3})y + x + 3 \le 0. \end{cases}$$

Сложив левые части и правые части неравенств системы, получим

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 + 2\sqrt{3}y + 6 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + 2\sqrt{3}x + 3) + (y^2 + 2\sqrt{3}y + 3) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что система имеет единственное решение $x = -\sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$.

Аналогично действуя, получим, что при $a = 1 + 2\sqrt{3}$ система имеет единственное решение $x = \sqrt{3}$ и $y = \sqrt{3}$.

Ответ. $1 \pm 2\sqrt{3}$.

Далее рассмотрим две системы уравнений с параметром, решаемые аналитическими методами.

Пример 4 (№13, § 15 сборника С5 2011). *При каких значениях параметра a система уравнений*

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть чисел (x_0, y_0) является решением данной системы уравнений. Так как числа $5-2\sqrt{6}$ и $5+2\sqrt{6}$ – взаимно обратные, т.е. $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=1$, то, подставляя равенство $5-2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ в первое уравнение системы, получим

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$

Заметим, что если пара (x_0, y_0) – решением этой системы уравнений, то и пара $(-x_0, y_0)$ будет также являться ее решением.

Следовательно, для того, чтобы система имела единственное решение необходимо, чтобы пары (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ совпадали. Это возможно при $x_0=0$. Подставим пару $(0, y_0)$ в систему:

$$\begin{cases}1+1-5a=y-|y|-8,\\ 0-(a-4)y=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}10-5a=y-|y|,\\ (a-4)y=0.\end{cases}$$

Отсюда получаем два допустимых значения параметра a: $a=2$ и $a=4$.

Пусть $a=2$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}=y-|y|+2,\\ x^2+2y=0.\end{cases}$$

Заметим, что справедлива оценка $(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}\ge 2$ (как сумма двух взаимно обратных чисел; причем равенство достигается, если $(5-2\sqrt{6})^x=1$, т.е. при $x=0$), а $y-|y|+2<2$ при $y<0$ и $y-|y|+2=2$ при $y\ge 0$. Следовательно, решением первого уравнения системы является любая пара вида $(0; y)$, где $y-$ любое действительное число. Подставляя пару $(0; y)$ во второе уравнение системы, получаем, что система имеет единственное решение $(0; 0)$.

Пусть $a=4$. Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}(5-2\sqrt{6})^x+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^x}=y-|y|+12,\\ x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y-|y|=-10,\\ x=0.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что система имеет единственное решение $(0;-5)$.

Ответ. $a=2$ и $a=4$.

Пример 5. (№7, § 15 сборника С5 2011). *Пусть* (y,x) – *решение системы уравнений*

$$\begin{cases}x+3y=a-2,\\ x^2+9y^2=2a-6.\end{cases}$$

При каком a *произведение* yx *принимает наименьшее значение.*

Решение. Выражая x из первого уравнения системы $x=a-2-3y$ и подставляя во второе уравнение, получаем

$$(a-2-3y)^2+9y^2=2a-6 \quad \Leftrightarrow \quad 18y^2+(12-6a)y+a^2-6a-2=0.$$

Решим последнее уравнение, как квадратное относительно y. Оно имеет решение, если его дискриминант $D=-36a^2+288a+288=-36(a^2-8a-8)$ неотрицателен. Решив неравенство $-36(a^2-8a-8)\ge 0$, получим, что $D\ge 0$ при $4-2\sqrt{2}\le a\le 4+2\sqrt{2}$.

При этих значениях параметра a уравнение имеет два корня $y_1=\dfrac{a-2-\sqrt{-a^2+8a+8}}{6}$ и $y_2=\dfrac{a-2+\sqrt{-a^2+8a+8}}{6}$, а данная система уравнений – две пары решений (x_1,y_1) и (x_2,y_2), где

$$x_1=a-2-3y_1=\frac{a-2+\sqrt{-a^2+8a+8)}}{6},$$

$$x_1=a-2-3y_2=\frac{a-2-\sqrt{-a^2+8a+8)}}{6}.$$

При $D=0$ полученные пары решений совпадают.

Заметим, что

$$x_1\cdot y_1=x_2\cdot y_2=\left(\frac{a-2+\sqrt{-a^2+8a+8}}{6}\right)\left(\frac{a-2-\sqrt{-a^2+8a+8}}{6}\right)=$$

$$=\frac{(a-2)^2-(-a^2+8a+8)}{36}=\frac{a^2-6a-2}{18}=\frac{(a-3)^2-11}{18}.$$

Следовательно, произведение будет принимать наименьшее значение, если $(a-3)^2=0$, т.е. при $a=3$.

Ответ. 3.