Лекция 20.01.2010

Методика обучения математике по учебнику для 10 класса «Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень»

Тема: «Методика решения текстовых задач»

Лектор Прокофьев А.А. aaprokof@yandex.ru

Текстовые задачи на составление уравнений или неравенств являются традиционным разделом, часто встречающимся на вступительных и выпускных экзаменах.

Как правило, в этих задачах описывается определенный процесс и требуется найти ту или иную величину, заданную условием. Для этого приходится представлять заданные ситуации в виде математических формул (уравнений или неравенств).

Порядок решения текстовых задач обычно содержит следующие этапы: выбор неизвестных, составление уравнений (или неравенств), их решение, проверка и исследование. Наибольшую трудность при решении представляет составление уравнений, связывающих искомые величины. Важно выбрать удачно неизвестные – от этого зависит сложность уравнения или системы уравнений. Не обязательно брать в качестве неизвестных искомые величины. Иногда удобнее найти другие величины (легче получить соотношения, проще уравнения и т.д.), через которые можно будет в дальнейшем выразить искомые.

Если при решении получается, что число уравнений, которые удается составить, меньше числа неизвестных, то нужно обратить внимание на следующее:

не введены ли лишние неизвестные, которые не требуется находить, а их введение не облегчает решение задачи;

действительно ли необходимо находить все введенные неизвестные – может быть по условию задачи нужно найти отношение (или другую комбинацию) некоторых из них, и составленные уравнения позволяют это сделать;

не учтено некоторое условие, которое не может быть записано в виде уравнения, но из соображений здравого смысла накладывающее ограничения на искомые величины (целочисленность и др.)?

При составлении уравнений необходимо следить за тем, чтобы единицы измерения были одинаковыми на протяжении всего решения для всех объектов задачи (время, скорости, пройденные отрезки пути и т.д.) и исходные данные выражались в единой системе размерностей.

Рассмотрим основные типы задач, наиболее часто встречающихся на вступительных экзаменах.

1. Задачи на количественные соотношения.

Пример 1. *Товар продавался в течение двух дней: в первый день по цене 20 руб. за 1 кг, а во второй – 90 руб. за 1 кг. Какая часть общей выручки была получена за товар в первый день, если средняя цена товара оказалась равной 60 руб. за 1 кг?*

Решение. Пусть x (*кг*) товара было продано в первый день, а y (*кг*) – во второй. Тогда выручка за первый день составила $20x$ *руб*., а за второй – $90y$ *руб*. Средняя цена товара за оба дня равна $\frac{20x+90y}{x+y}$. По условию средняя цена равна 60 *руб*. за 1 *кг*. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{20x+90y}{x+y}=60 \text{ или } 20x+90y=60x+60y, \text{ т. е. } 4x=3y.$$

Доля выручки за первый день равна

$$\frac{20x}{20x+90y}=\frac{5\cdot 4x}{5\cdot 4x+90y}=\frac{5\cdot 3y}{5\cdot 3y+90y}=\frac{15}{105}=\frac{1}{7}.$$

Ответ. $\frac{1}{7}$.

Пример 2. *Площади трех участков земли относятся* как 4 : 3 : 5. Урожайность всех трех участков одинакова и составляет *28 центнеров с гектара. Известно, что со второго и третьего участков вместе было собрано на* 336 *центнеров больше, чем с первого. Найти площадь каждого из участков.*

Решение. Пусть $S_1, S_2, S_3 -$ искомые площади участков (*га*). По условию задачи $S_1 = 4k, S_2 = 3k$ и $S_3 = 5k$.

Количество зерна, собранного с каждого участка, составит соответственно

$$P_1 = 28S_1 = 112k, P_2 = 28S_2 = 84k \text{ и } P_3 = 28S_3 = 140k.$$

По условию $P_2 + P_3 = P_1 + 336$ или $84k + 140k - 112k = 336$, т. е. $112k = 336$ или $k = 3$. Следовательно, $S_1 = 12$, $S_2 = 9$ и $S_3 = 15$ (*га*).

Ответ. 12, 9 и 15 (*га*).

Пример 3. *Из двух жидкостей, плотности которых равны 1,2 г/см*^{3} *и 1,6 г/см*^{3}*, составлена смесь массой 60 г. Сколько граммов каждой жидкости в смеси и какова плотность смеси, если ее 8 см*^{3} *имеют такую же массу, как масса всей менее плотной из смешанных жидкостей?*

Решение. Пусть было взято x граммов жидкости с плотностью 1,2 *г/см*^{3} и y – с плотностью 1,6 *г/см*^{3}. По условию задачи $x+y=60$. Выразим объемы исходных жидкостей. Объем первой равен $\frac{x}{1,2}$ *см*^{3}, второй – $\frac{y}{1,6}$ *см*^{3}, объем смеси – $\frac{x}{1,2}+\frac{y}{1,6}$ *см*^{3} и плотность смеси – $\dfrac{60}{\frac{x}{1,2}+\frac{y}{1,6}}$ *г/см*^{3}. Тогда второе условие (про массу 8 *см*^{3} смеси) запишется уравнением:

$$8\cdot\dfrac{60}{\frac{x}{1,2}+\frac{y}{1,6}}=x \quad \text{или} \quad x\cdot\left(\frac{x}{1,2}+\frac{y}{1,6}\right)=480.$$

Составим систему уравнений $\begin{cases} x+y=60, \\ x\cdot\left(\dfrac{x}{1,2}+\dfrac{y}{1,6}\right)=480. \end{cases}$

Выразив y из первого уравнения и подставив во второе, получим $x^2+180x-2304=0$. Отсюда $x=12$ и $x=-192$ (но $x>0$). Тогда $y=48$. Плотность смеси равна $\dfrac{60}{\frac{12}{1,2}+\frac{48}{1,6}}=\dfrac{60}{10+30}=1,5$ *г/см*^{3}.

Ответ: 12 *г* менее и 48 *г* более плотной, плотность смеси 1,5 *г/см*^{3}.

К подобным задачам можно отнести и задачи с физическим содержанием из ЕГЭ-2010, в которых, как правило, в данную физическую формулу необходимо подставить числовые данные и оценить получившееся значение.

Пример 4. **ЕГЭ-2010. Прототип задания B10 (№ 27962).** *Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением* $T(t) = T_0 + bt + at^2$, *где* $t-$ *время в минутах,* $T_0 = 1400$ *К,* $a = -10$ *К/мин²,* $b = 200$ *К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше* 1760 *К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.*

Решение. Подставляя числовые данные в формулу зависимости температуры (в градусах Кельвина) от времени, получим $T(t) = 1400 + 200t - 10t^2$. Прибор должен быть отключен в момент времени t_0, когда $T(t_0) = 1760$ и при переходе через t_0 температура превысит 1760 *К*. Решаем неравенство

$$1400 + 200t - 10t^2 > 1760 \quad \Leftrightarrow \quad 10t^2 - 200t + 360 < 0$$
$$t^2 - 20t + 36 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-2)(t-18) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in (2; 18).$$

Следовательно, прибор будет работать на промежутке времени получаем $t \in [0;\, 2]$, а далее при $t_0 = 2$ *мин* он должен быть отключен. Так как иначе он может испортиться.. ***Ответ.*** 2 *мин.*

2. Задачи на движение; на наполнение (опорожнение) объемов; на работу и производительность

Отметим, что методика решения задач этого типа одинакова как для задач на движение, так и для задач на наполнение (опорожнение) объемов и на выполнение работы. По условию во всех этих задачах происходит некоторый (чаще всего) линейный пространственно-временной процесс.

Табл. 1

	Путь, количество выполняемой работы, объем	скорость или производительность	время	Уравнение связи
Задачи на движение	S – пройденный путь	v – путь, проходимый в единицу времени (скорость движения)	t	$S = vt$
Задачи на работу	A – выполненная работа	v – количество работы, выполняемой в единицу времени (производительность)	t	$A = vt$
Задачи на наполнение объемов	V – заполняемый объем	v – объем, поступающий в единицу времени (производительность);	t	$V = vt$

Для получения полной системы уравнений, описывающей заданный процесс, используется подход, заключающийся в составлении уравнений «движения» во всех описанных ситуациях для каждого участника. К ним добавляются уравнения связи или другие соотношения в соответствии с условиями задачи.

В задачах этого раздела в качестве неизвестных величин удобнее брать расстояния и скорости участников движения (объемы и производительности, всю работу и производительности), реже – время. При этом не следует пытаться обойтись небольшим числом переменных. Важно, чтобы легче составлялись уравнения. Методы же решения полученных уравнений или систем зависят от вида последних. Полученные ответы необходимо проверить, так как в ходе решения могли появиться лишние варианты. При получении единственного ответа в стандартной текстовой задаче проверка не требуется.

При решении задач на движение полезно составить иллюстративный чертеж, т. е. изобразить каждую из описанных в условии ситуаций на схеме, указав направления движения и скорости участников, а также отметив пройденные ими расстояния. Это поможет составить уравнения.

Пример 1. (МИЭТ, 2002, июль, №4 из 11). *Из пунктов A и B, расстояние между которыми 55 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и автомобилист. Через полчаса они встретились. Найти скорости мотоцикла и автомобиля, если известно, что скорость автомобиля на 20 % больше скорости мотоцикла.*

Решение. Пусть скорость мотоцикла x (*км/ч*), а скорость автомобиля y(*км/ч*). Тогда разность $y-x$ составляет по условию 20% от x. Получаем уравнение $y-x=0,2x$. До точки встречи мотоцикл проехал $0,5x$ *км*, автомобиль – $0,5y$ *км* (рис. 1). Сумма этих расстояний равна расстоянию между пунктами A и B, т. е. 55 *км*. Получаем систему уравнений

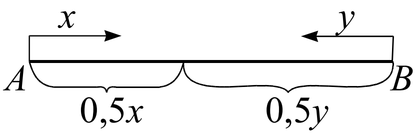

Рис. 1

$$\begin{cases} y-x=0,2x, \\ 0,5x+0,5y=55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50, \\ y=60. \end{cases}$$

Ответ. 50 и 60(*км/ч*).

Пример 2. *Первый рабочий изготовил* 60 *деталей на три часа быстрее второго. За какое время второй рабочий изготовит* 90 *деталей, если работая вместе, они изготавливают за один час* 30 *деталей.*

Решение. Пусть n_1 и n_2 – число деталей, изготавливаемых первым и вторым рабочими за 1 час. Примем, что $n_1 > n_2$.

Совместно за 1 час они производят 30 деталей или $n_1 + n_2 = 30$.

На изготовление 60 деталей первый затратил $\frac{60}{n_1}$ часа, а второй $\frac{60}{n_2}$ или на 3 часа больше. Значит $\frac{60}{n_2} - \frac{60}{n_1} = 3$.

Объединим уравнения в систему $\begin{cases} n_1 + n_2 = 30, \\ \frac{60}{n_2} - \frac{60}{n_1} = 3. \end{cases}$

Выразим из первого уравнения $n_1 = 30 - n_2$ и подставим во второе.

Тогда $\frac{60}{n_2} - \frac{60}{30 - n_2} = 3$ или $n_2^2 - 70n_2 - 600 = 0$. Откуда $n_2 = 35 \pm 25$. Так как по условию $n_2 < 30$, то $n_2 = 10$ и, следовательно, 90 деталей второй рабочий изготовит за 9 *часов*.

Ответ: 9 *часов*.

Пример 3. *Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?*

Решение. (1-*й способ*). Пусть V_1 и V_2 *м*^{3} – объемы первого и второго танкеров, а v *м*^{3}/*час* – производительности насосов. При совместной работе общая производительность насосов будет $4v$ *м*^{3}/*час*. Из условия задачи (о наполнении за 11 *часов*) получим уравнение:

$$\frac{V_1 + \frac{1}{3}V_2}{4v} = 11 \text{ или } \frac{1}{4}\frac{V_1}{v} + \frac{1}{12}\frac{V_2}{v} = 11. \tag{1}$$

Из условия задачи (о наполнении за 18 *часов*) получим:

$$\frac{V_1}{3v} + \frac{\frac{1}{4}V_2}{v} = 18 \text{ или } \frac{1}{3}\frac{V_1}{v} + \frac{1}{4}\frac{V_2}{v} = 18. \tag{2}$$

Время наполнения тремя насосами второго танкера равно $\frac{V_2}{3v}$.

Из уравнения (1) выразим $\frac{V_1}{v} = 44 - \frac{1}{3}\frac{V_2}{v}$ и подставим его в (2)

$$\frac{1}{3}\left(44 - \frac{1}{3}\frac{V_2}{v}\right) + \frac{1}{4}\frac{V_2}{v} = 18.$$

Следовательно, время наполнения одним насосом второго танкера $\frac{V_2}{v} = 24$. Отсюда искомое время равно $\frac{V_2}{3v} = 8$ *часов*.

(2-*й способ*). Пусть t_1 и t_2 (*час*) – время, необходимое для заполнения первого и второго танкеров одним насосом. Записав уравнения, соответствующие условиям задачи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{t_1}{4} + \frac{t_2}{12} = 11, \\ \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{4} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_1 + t_2 = 132, \\ 4t_1 + 3t_2 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = 24.$$

Отсюда искомое время равно $\frac{t_2}{3} = 8$. ***Ответ:*** 8 *часов*.

Пример 4. *Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 100 км, выехали одновременно с одинаковой скоростью два мотоциклиста. Через 30 мин после начала движения у одного из них случился прокол. Второй мотоциклист продолжил движение, а первый остановился и на замену колеса потратил 15 мин. После этого он продолжил движение, увеличив скорость на 10 км/час, и прибыл в пункт B одновременно со вторым мотоциклистом. Определить время, за которое они преодолели путь из A в B.*

Решение. Пусть x *км/час* – первоначальная скорость мотоциклистов. Тогда $0,5x$ *км* – путь, пройденный первым из них до остановки (здесь 30 *мин* = 0,5 *час*). Второй двигался с постоянной скоростью и на весь путь затратил $t_2 = \frac{100}{x}$ *час*. Первому от места прокола до пункта B оставалось проехать $(100 - 0,5x)$ *км*. С учетом остановки на 15 *мин* = 0,25 *часа* он находился в пути

$$t_1 = \left(0,5 + 0,25 + \frac{100 - 0,5x}{x + 10}\right) \text{ час.}$$

По условию $t_1 = t_2$ (в пункт B они приехали одновременно), или

$$\frac{100}{x} = 0,75 + \frac{100 - 0,5x}{x + 10}.$$

Отсюда $0,25x^2 + 3,25x - 4000 = 0$. Получаем $x = 50$ или $x = -80$. Так как $x > 0$, то $x = 50$ *км/час*. Время движения из пункта A в пункт B равно $\frac{100}{x} = \frac{100}{50} = 2$ *часа*. ***Ответ:*** 2 *часа*.

При равномерном движении тел, находящихся первоначально на расстоянии S, навстречу друг другу или в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 для вычисления времени встречи используются формулы:

а) $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$ – при движении тел навстречу друг другу;

б) $t = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$ – при движении в одну сторону при $v_1 > v_2$.

Формула (а) применяется и в задачах на совместное выполнение работы, и наполнение (опорожнение) объемов.

Рассмотрим следующую задачу (в общем виде).

Пример 5. *Два пешехода выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Известно, что первый из них преодолеет расстояние между пунктами за время t_1, второй – за время t_2. Определить время t_3 их встречи с момента начала движения.*

Решение. Пусть расстояние между пунктами равно S. Тогда первый пешеход движется со скоростью $v_1 = \dfrac{S}{t_1}$, второй – со скоростью $v_2 = \dfrac{S}{t_2}$. Так как при движении навстречу друг другу они встретятся через время $t_3 = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$, то $t_3 = \dfrac{S}{v_1 + v_2} = \dfrac{S}{\dfrac{S}{t_1} + \dfrac{S}{t_2}} = \dfrac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$.

Из последней формулы получаем

$$t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2},\ t_1 = \frac{t_3 \cdot t_2}{t_2 - t_3} \text{ и } t_2 = \frac{t_3 \cdot t_1}{t_1 - t_3}.$$

Пример 6. *Бак наполняется двумя кранами A и B. Наполнение бака только через кран A длится на 22 мин дольше, чем наполнение только через кран B. Если же открыть оба крана, то бак наполнится через 1 час. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?*

Решение. Пусть t_A и t_B (*час*) – время, необходимое для заполнения бака только через кран A и B соответственно. Условия задачи позволяют составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} t_A - t_B = \dfrac{11}{30}, \\ \dfrac{t_A \cdot t_B}{t_A + t_B} = 1. \end{cases}$$

Решив ее, получаем: $t_A = 2$ *часа* 12 *мин*, $t_B = 1$ *час* 50 *мин*.

Ответ: 2 *час* 12 *мин* и 1 *час* 50 *мин*.

Пример 7. **(МИЭТ, 2004, июль, №8 из 11).** *Из пункта A по направлению в сторону пункта B выехали автомобиль и мотоциклист. Одновременно с ними из пункта B в том же направлении выехал велосипедист. Автомобиль догнал велосипедиста и сразу же повернул назад. Проехав четверть своего обратного пути, автомобиль встретил мотоциклиста и вернулся в пункт A в тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста. Найти отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста.*

Решение. (*1-й способ*). Обозначим скорости автомобиля, мотоциклиста и велосипедиста $v_а$, $v_м$ и $v_в$ соответственно, S – расстояние от A до B.

Пусть автомобиль догнал велосипедиста в точке C в момент времени t_1, S_1 – расстояние от B до C, S_2 – расстояние от A до C (рис. 2). Тогда получаем уравнения: $S_1 = v_в \cdot t_1$, $S = S_2 - S_1$,

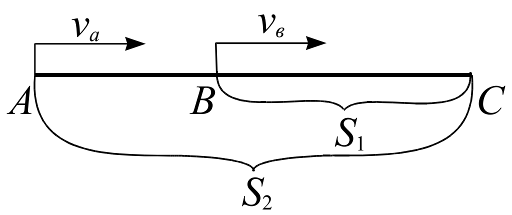

Рис. 2

$$S_2 = v_а \cdot t_1, \qquad (1)$$

$$S_1 = (v_а - v_в) \cdot t_1. \qquad (2)$$

Пусть автомобиль встретил мотоциклиста в точке D через время t_2 после поворота (рис. 3). В этом случае автомобиль проехал расстояние от C до D, равное $\frac{1}{4}S_2$ за время t_2, а мотоциклист проехал расстояние от A до D, равное $S_2 - \frac{1}{4}S_2 = \frac{3}{4}S_2$ за время $t_1 + t_2$. Получаем уравнения:

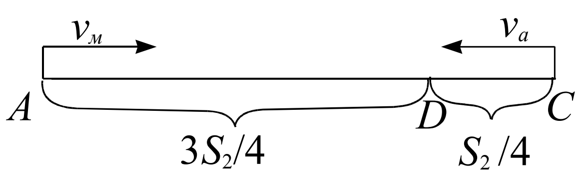

Рис. 3

$$\frac{1}{4}S_2 = v_а \cdot t_2, \qquad (3)$$

$$\frac{3}{4}S_2 = v_м \cdot (t_1 + t_2). \qquad (4)$$

Автомобиль вернулся в пункт по A через время $2t_1$ после начала движения, и в этот момент мотоциклист догнал велосипедиста в некоторой точке E (рис. 4). Пусть расстояние от B до E равно S_3, расстояние от A до E равно S_4. Получаем уравнения:

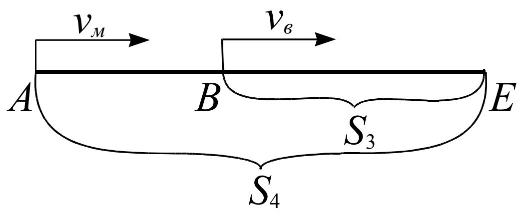

Рис. 4

$$S_3 = 2v_в t_1,$$

$$S_3 = 2v_в t_1,$$

$$S = S_4 - S_3,$$

$$S = \left(v_м - v_в\right) \cdot 2t_1. \qquad (5)$$

Объединив уравнения (1), (2), (3), (4), (5) в систему и решив ее, найдем $v_м = 3v_в$.

Ответ. 3.

Пример 7. (графический метод решения). *Из пункта A по направлению в сторону пункта B выехали автомобиль и мотоциклист. Одновременно с ними из пункта B в том же направлении выехал велосипедист. Автомобиль догнал велосипедиста и сразу же повернул назад. Проехав четверть своего обратного пути, автомобиль встретил мотоциклиста и вернулся в пункт A в тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста. Найти отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста.*

Решение. (*Второй способ – графический*). Изобразим графики движения автомобиля, мотоциклиста и велосипедиста в одной системе координат (рис. 5).

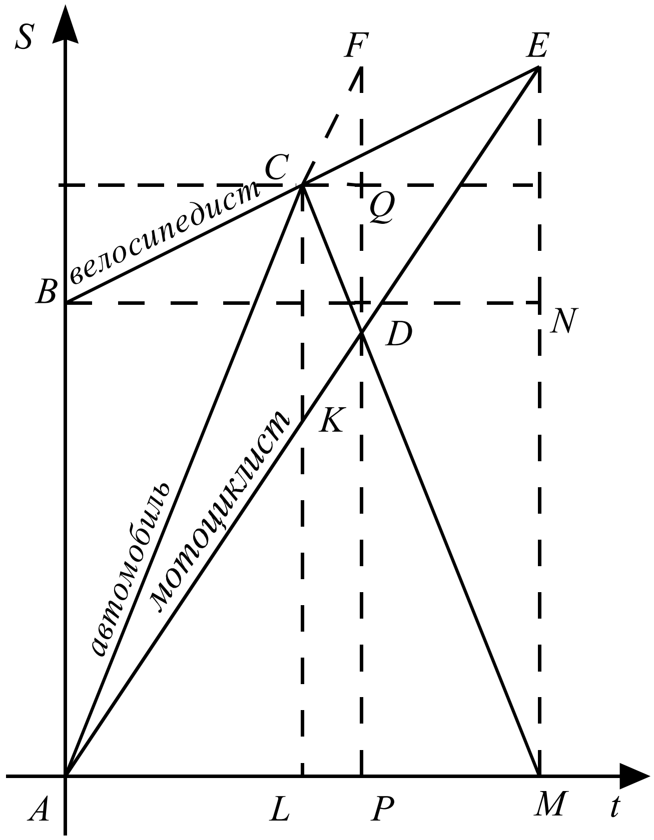

Рис. 5

Отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста равно отношению $EM:EN$. При этом $EN = EM - AB$. Заметим, что CK является средней линией ΔBEA, KL является средней линией ΔEAM. Следовательно, $AB = 2CK$, $EM = 2KL$. Продолжим прямую AC до пересечения с прямой PD в точке F, $CF = CD$. Тогда

$$CK : KL = FD : DP = \\ = 2QD : DP = 2:3,$$

так как по условию $QD : QP = 1:4$, следовательно, $QD : DP = 1:3$.

Таким образом, $CK = \frac{2}{3}KL$, $AB = \frac{4}{3}KL$, $EN = 2KL - \frac{4}{3}KL = \frac{2}{3}KL$,

$$EM : EN = 2KL : \frac{2}{3}KL = 3.$$

Отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста равно 3.

Ответ. 3.

Пример 8. (МИЭТ, 2003, июль, № 11 из 11). *Из пункта A в пункт B с интервалом 10 минут выехали 24 велосипедиста, каждый из которых затратил на весь путь 5 часов. Одновременно с ними из пункта B в пункт A выезжали мотоциклисты, каждый из которых затратил на весь путь одинаковое время. В пути произошло 498 встреч (без учета встреч в пунктах A и B). Какие значения может принимать время нахождения в пути каждого мотоциклиста?*

Решение. Изобразим графики движения велосипедистов и мотоциклистов на одной координатной плоскости, учитывая, что последние велосипедист и мотоциклист выехали через 230 минут после старта первых, т.е. в момент времени $t = 230$, а первый велосипедист в это время в пункт B еще не приехал (рис. 6).

Замечание. Графики движений будем изображать прямыми линиями, т. е. предполагая, что их скорости постоянны. На самом деле, зависимости координаты от времени для мотоциклистов являются непрерывными возрастающими функциями, для велосипедистов – непрерывными убывающими функциями, но на ход решения это не влияет.

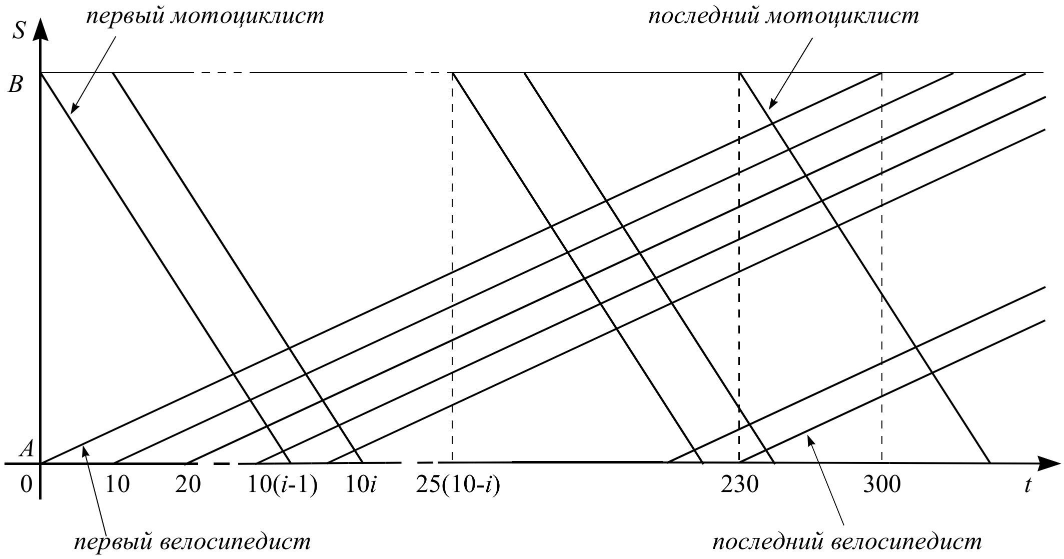

Рис. 6

Пусть первый мотоциклист в пути встречает i велосипедистов. Тогда время τ нахождения в пути этого (а значит, и любого другого) мотоциклиста удовлетворяет неравенству $10(i-1)<\tau\le 10i$.

Заметим, что первый мотоциклист не может встретить всех велосипедистов, так как в этом случае каждый мотоциклист встретил бы всех велосипедистов, и количество встреч было бы равно $24^2=576$, что противоречит условию. Второй мотоциклист встретит $i+1$ велосипедиста, третий – $i+2$, …, k-й – $i+k-1$, при условии, что $i+k-1\le 24$. Увеличение числа встреч на одну будет продолжаться до тех пор, пока числа $i+1,\ i+2,...,$ $i+k-1$ не станет больше 24. Их количество равно $k=24-i+1=25-i$.

Последний из этих мотоциклистов и все остальные (их количество равно $24-(25-i)=i-1$) будут встречать всех 24-х велосипедистов. Значит, число встреч равно

$$\underbrace{i+(i+1)+...+23+24}_{25-i}+\underbrace{24+24+...+24}_{i-1}=498$$

или $\dfrac{i+24}{2}\cdot(25-i)+24(i-1)=498$ или $i^2-49i+444=0$,

т. е. $i=12$ или $i=37$ (но $i\le 24$). Значит $110<\tau\le 120$.

Ответ. $(110;120]$ *мин.*

Рассмотрим задачи на движение по реке.

Пример 9. (МИЭТ, 2004, июнь, №6 из 11). *Катер тратит на путь от пункта A до пункта B, расположенного ниже по течению реки, такое же время, как на путь от пункта B до пункта C, расположенного посередине между A и B. Найти отношение скорости катера в стоячей воде к скорости течения реки.*

Решение. Пусть S(*км*) – расстояние от A до B, x (*км/ч*) – скорость катера в стоячей воде, y (*км/ч*) – скорость течения реки. Тогда скорость катера при движении по течению реки от пункта A до пункта B равна $x+y$ (*км/ч*), и расстояние от A до B преодолевается им за $\frac{S}{x+y}$ (часов).

По условию задачи расстояние между пунктами B и C равно $\frac{S}{2}$ (*км*). Двигаясь против течения реки от B до C со скоростью $x-y$ (*км/ч*), катер затрачивает $\frac{S}{2(x-y)}$ часов. Получаем уравнение $\frac{S}{2(x-y)}=\frac{S}{x+y}$.

Отсюда получаем $2x-2y=x+y$, $x=3y$. ***Ответ.*** 3**.**

Пример 10. (МИЭТ, 2000, июль, №6 из 11). *Пароход вышел из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, и, дойдя до В, сразу же повернул обратно, затратив на весь путь 5 часов. Сколько времени идет пароход от В до А, если известно, что плоты сплавляются от А до В за 12 часов?*

Решение. (1-*й способ*). Аналогично решению предыдущей задачи (обозначая скорость парохода в стоячей воде x (*км/ч*), скорость течения реки y (*км/ч*), а S (*км*) – расстояние между пунктами A и B, получим в итоге систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{S}{x+y}+\dfrac{S}{x-y}=5, \\ S=12y. \end{cases}$, из первого уравнения системы получим $\dfrac{2Sx}{x^2-y^2}=5$ и $x=5y$. Тогда искомое время $t=\dfrac{S}{x-y}=3$ (часа)).

Решение. (2-*й способ*). Пусть скорость парохода в стоячей воде x (*км/ч*), скорость течения реки y (*км/ч*), S (*км*) – расстояние между A и B. Введем обозначения: t_1 (*ч*) – время движения парохода по течению реки на пути из A в B, а t_2 (*ч*) – время движения парохода против течения на пути из B в A.

По условию задачи $t_1+t_2=5$. Учитывая, что $x+y=\dfrac{S}{t_1}$ и $x-y=\dfrac{S}{t_2}$, получим $\dfrac{S}{t_1}-\dfrac{S}{t_2}=(x+y)-(x-y)=2y$. Так как $S=12y$, то из уравнения $\dfrac{S}{t_1}-\dfrac{S}{t_2}=2y$ следует $\dfrac{6}{t_1}-\dfrac{6}{t_2}=1$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{t_1}-\dfrac{6}{t_2}=1, \\ t_1+t_2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1t_2=6(t_2-t_1), \\ t_1+t_2=5. \end{cases}$$

Отсюда получаем $t_2=3$. ***Ответ.*** 3 часа.

При движении по некоторой кольцевой траектории (по окружности, дорожке стадиона и т.д.) длины S двух тел со скоростями v_1 и v_2 при одновременном старте в одну сторону ($v_1 > v_2$) в момент времени t, когда первое тело догонит второе, будет выполняться условие:

$$l = t(v_1 - v_2) \text{ или } t = \frac{l}{v_1 - v_2}, \quad (2.1)$$

где l – первоначальное расстояние между телами вдоль траектории.

При одновременном старте тел навстречу друг другу из одной точки время, через которое они встретятся, равно

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2} \text{ или } S = (v_1 + v_2)t. \quad (2.2)$$

Пример 11. *Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 сек меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 сек. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?*

Решение. Пусть v_1 и v_2 (*м/сек*) – скорости спортсменов (для определенности будем считать $v_2 > v_1$. Пусть S (*м*)– длина дорожки. Тогда первый спортсмен пробегает ее за время $\dfrac{S}{v_1}$, а второй – за $\dfrac{S}{v_2}$ или на 5 *сек* быстрее первого, т. е. $\dfrac{S}{v_1} - \dfrac{S}{v_2} = 5$.

Так как при движении с общего старта одновременно в одном направлении они оказываются рядом через 30 *сек*, то из формулы (2.1) следует $S = 30(v_2 - v_1)$. Получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v_1} - \dfrac{S}{v_2} = 5, \\ S = 30(v_2 - v_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S}{v_1} - \dfrac{S}{v_2} = 5, \\ \dfrac{v_2}{S} - \dfrac{v_1}{S} = \dfrac{1}{30}. \end{cases}$$

По формуле (2.2) спортсмены встретятся через $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2} = \dfrac{1}{\dfrac{v_1}{S} + \dfrac{v_2}{S}}$. Обозначая $p_1 = \dfrac{v_1}{S}$, $p_2 = \dfrac{v_2}{S}$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = 5, \\ p_2 - p_1 = \dfrac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^2 + 5p_1 - 1 = 0, \\ p_2 = \dfrac{1}{30} + p_1. \end{cases}$$

Отсюда $p_1 = \dfrac{1}{15}$ и $p_2 = \dfrac{1}{10}$.

Следовательно, $t = \dfrac{1}{p_1 + p_2} = 6$ *сек.* ***Ответ:*** 6 *сек.*

Пример 12. (МИЭТ, 2004, июль, № 8 из 11). *По круговому маршруту из одного и того же места одновременно в разных направлениях выехали велосипедист и мотоциклист. До момента их первой встречи расстояние в* 6 *км, измеряемое по меньшей из дуг маршрута было между ними дважды: в первый раз через* 5 *минут после старта, когда велосипедист проехал одну двадцатую часть маршрута, второй раз, когда мотоциклист проехал три пятых части маршрута. Через какое время после старта расстояние в* 6 *км было между ними во второй раз?*

Решение. Пусть v_1, v_2 (*км/ч*) – соответственно скорости велосипедиста и мотоциклиста, длина маршрута равна S (*км*).

Обозначим через t (*ч*) время с момента старта, через которое расстояние между ними во второй раз станет равным 6 *км*; через A точку старта, B и C – точки, в которых находились соответственно велосипедист и мотоциклист через 5 *мин* = $\frac{1}{12}$ *час*, после старта (рис. 7). По условию задачи $AB = \frac{1}{20}S$, $BC = 6$. Получаем:

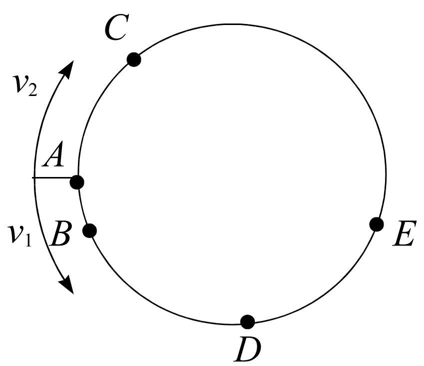

Рис. 7

$$\frac{1}{12}v_1 = \frac{1}{20}S, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{12}v_2 = 6. \qquad (2)$$

Обозначим через D и E точки, в которых находились соответственно велосипедист и мотоциклист через t часов после старта, когда второй раз расстояние между ними было 6 км. По условию задачи длина пути AE (через точку C) равна $\frac{3}{5}S$, $AD + AE = S - 6$. Получаем уравнения

$$v_2 t = \frac{3}{5}S, \tag{3}$$

$$v_1 t + v_2 t = S - 6. \tag{4}$$

Найдем t из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{12}v_1 = \frac{1}{20}S, \\ \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{12}v_2 = 6, \\ v_2 t = \frac{3}{5}S, \\ v_1 t + v_2 t = S - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{5}S, \\ v_1 + v_2 = 72, \\ \frac{5}{3}v_2 t = S, \\ 72t + 6 = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{5}S, \\ v_2 = 72 - \frac{3}{5}S, \\ 120t - St = S, \\ 72t + 6 = S. \end{cases}$$

Из системы получаем уравнение относительно t:

$$120t - (72t + 6)t = 72t + 6 \text{ или } 72t^2 + 198t + 6 = 0,$$

корни которого равны $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{3}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют два значения t: $t = \frac{1}{4}$ и $t = \frac{1}{3}$ часа.

Ответ. 15 или 20 минут.

В следующих задачах требуется определить промежуток, в котором лежат искомые значения величин. Это можно сделать либо с помощью решения неравенств или систем неравенств, либо с помощью нахождения множества значений некоторой функции.

Пример 13. (МИЭТ, 2000, апрель, №8 из 11). *Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций А и В, расстояние между которыми* 600 *км. Первый из них приходит на станцию В на* 3 *часа раньше, чем второй на станцию А. В каких пределах заключено время движения первого поезда, если известно, что скорости поездов отличались более чем на* 10 *км/ч, а максимальная скорость на перегоне не должна превышать* 60 *км/ч?*

Решение. Обозначим через t (*час*) время движения первого поезда от A до B. Тогда время движения второго поезда от B до A равно $(t+3)$ (*час*). Расстояние в 600 км первый поезд прошел со скоростью $\frac{600}{t}$ *км/ч*, а второй $\frac{600}{t+3}$ *км/ч*. По условию $\frac{600}{t} \le 60$. Отсюда следует, что $t \ge 10$.

Кроме того, скорости поездов различались более чем на 10 *км/ч*, т. е. $\frac{600}{t} - \frac{600}{t+3} > 10$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{600}{t} - \frac{600}{t+3} > 10, \\ t \ge 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+15)(t-12) < 0, \\ t \ge 10; \end{cases} \Leftrightarrow 10 \le t < 12.$$

Ответ: $t \in [10;12)$.

Пример 14. (МИЭТ, 2000, №8 из 11). *Двое рабочих выполняют некоторую работу. Если первый рабочий проработает 2 часа, а затем они вместе будут работать 3 часа, то они вместе выполнят 75% всей работы. Какие значения может принимать время выполнения всей работы двумя рабочими вместе?*

Решение. Пусть p_1 – удельная производительность труда первого рабочего (т. е. часть всего объема работы, который он выполняет за час), p_2 – удельная производительность труда второго рабочего, t – время выполнения всей работы двумя рабочими совместно (в часах). По условию $t(p_1 + p_2) = 1$ и $2p_1 + 3(p_1 + p_2) = 0,75$. Отсюда $p_1 = 0,15 - 0,6p_2$, $t = \dfrac{1}{p_1 + p_2} = \dfrac{1}{0,15 + 0,4p_2}$. По смыслу задачи $p_2 > 0$, $p_1 > 0$, следовательно, $0,15 - 0,6p_2 > 0$, $p_2 < 0,25$. Функция $t(p_2) = \dfrac{1}{0,15 + 0,4p_2}$ – непрерывна и убывает на отрезке $[0; 0,25]$. Следовательно, при $p_2 \in (0; 0,25)$ значения функции $t(p_2)$ удовлетворяют неравенству $t(0,25) < t(p_2) < t(0)$, $4 < t(p_2) < \dfrac{20}{3}$. Функция $t(p_2)$ непрерывна и принимает все значения из интервала $\left(4; \dfrac{20}{3}\right)$. ***Ответ.*** $\left(4; \dfrac{20}{3}\right)$ час.

3. **Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”**

Выделим несколько характерных типов задач «на проценты».

Процентом какого-либо числа называется сотая часть этого числа, поэтому в задачах от процентов можно освобождаться, переходя к дробям.

Приведем несколько ключевых фактов, которые можно записать формулой.

1. Факт, что ***число*** a ***составляет*** k % ***от числа*** b**,** записывают формулой: $a = \frac{k}{100} \cdot b.$

Это позволяет в задачах от процентов можно освобождаться, переходя к дробям. Например, то, что число a составляет 27 % от b, записывается в виде $a = 0,27b.$

2. Ответ на вопрос о том, ***сколько процентов составляет число*** a ***от числа*** b, дает формула $k = \frac{a}{b} \cdot 100.$

Например, 33 составляет 15% от 220, так как $\frac{33}{220} \cdot 100 = 15\,\%$.

3. Факт, что ***число*** a, ***большее числа*** b ***на*** k %, записывается формулой $a = \left(1 + \frac{k}{100}\right) \cdot b.$

Если ***число*** a ***меньше числа*** b ***на*** k %, то $a = \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot b.$

Например, найдем число x большее 256 на 25 %. Из формулы получим $x = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot 256 = 1,25 \cdot 256 = 320.$

4. Пусть требуется найти, ***в каком процентном соотношении находятся числа*** a, b ***и*** c. В этом случае следует определить, какой процент составляет каждое число по отношению к сумме этих чисел. Пусть k_a, k_b и k_c – искомые проценты, тогда

$$k_a = \frac{a}{a+b+c} \cdot 100, \; k_b = \frac{b}{a+b+c} \cdot 100, \; k_c = \frac{c}{a+b+c} \cdot 100.$$

Пример 1 (ЕГЭ-2009. В9). *Зимой цена на говядину снизилась на 12.5% по сравнению с осенью. На сколько процентов больше нужно продать говядины зимой, чтобы выручка от ее продажи увеличилась на 5 % по сравнению с осенью?* (*Процент правильных ответов около* 20).

Решение. Пусть осенью и зимой продано x и x_1 (*кг*) говядины по цене y и y_1 (*руб/кг*), а N и N_1 (*руб*) – выручка осенью и зимой соответственно.

Согласно условию $N_1 = N\left(1+\frac{5}{100}\right)$, $y_1 = y\left(1-\frac{12,5}{100}\right)$. Так как $N = xy$, а $N_1 = x_1y_1$, то получаем

$$x_1y_1 = xy\left(1+\frac{5}{100}\right) \text{ или } x_1y\left(1-\frac{12,5}{100}\right) = xy\left(1+\frac{5}{100}\right).$$

Отсюда получаем $x_1 = x\frac{1,05}{0,875}$ или $x_1 = 1,2x$, т. е. количество проданной говядины должно быть увеличено на 20 %.

Ответ: 20 %.

Пусть смесь (сплав, раствор) составлена из нескольких компонентов $A_1, ..., A_n$, имеющих массы $m_{A_1}, ..., m_{A_n}$, соответственно. Тогда масса смеси, составленной из них, равна $m = m_{A_1} + ... + m_{A_n}$. ***Массовой концентрацией*** компоненты A_k $(k = 1, 2, ..., n)$ в смеси называется величина c_{A_k}, выражаемая формулой

$$c_{A_k} = \frac{m_{A_k}}{m} = \frac{m_{A_k}}{m_{A_1} + ... + m_{A_n}}.$$

При этом верно равенство $c_{A_1} + c_{A_2} + ... + c_{A_n} = 1$.

Аналогично определяются ***объемные концентрации*** компонентов $A_1, A_2, ..., A_n$ в смеси, только вместо масс в формулах используются их объемы $V_{A_1}, V_{A_2}, ..., V_{A_n}$. Полагается, что получающаяся смесь однородна и ее объем равен сумме объемов компонентов.

Процентным содержанием компонента A_k в данной смеси называется величина $p_{A_k}\%$, вычисляемая по формуле $p_{A_k}\% = c_{A_k} \cdot 100\,\%$.

При решении задач на концентрацию и проценты, а это обычно задачи на смеси, растворы и сплавы, в качестве неизвестных, как правило, выбираются либо весь вес (объем) компонентов, либо их концентрация в смеси.

Пример 2 (из статьи И.Ф. Шарыгина «Где ошибка?», «Quantium», № 7-8, 1998)**.** *Фермер собрал* 10 т *арбузов и отправил их на барже по реке в ближайший город. Как известно, арбузы почти целиком состоят из воды. В момент отправления содержание воды в них равнялось* 99 %*. За время транспортировки арбузы несколько усохли, содержание воды уменьшилось на* 1 % (*Стало равным* 98 %.) *Чему равна масса арбузов, прибывших в город?*

Решение. Составим таблицу, в который каждая клетка с числовыми показателями разделена пополам, и в ней указан масса компонента и его процентное содержание. Масса твердой составляющей при перевозке не меняется. Тогда массу арбузов, прибывших в город, находим из пропорции (см. табл.).

	В момент сбора	В момент прибытия	
Вода	9900 *кг* / 99 %	4900 *кг* / 98 %	? *кг* – 98 % 100 *кг* – 2 %
Твердая составляющая	100 *кг* / 1 %	100 *кг* / 2 %	Масса не меняется
Арбузы	10000 *кг* / 100 %	5000 *кг* / 100 %	? *кг* – 100 % 100 *кг* – 2 %

Ответ: 5 т.

Пример 3. *Сплав меди и цинка весом* 60 *кг содержит* 40 % *меди. Сколько нужно добавить цинка, чтобы в сплаве его концентрация достигла* 80 %?

Решение. Составим таблицу. Пусть добавлено x *кг* цинка. Из пропорции $\frac{36+x}{24}=\frac{80}{20}$ находим $x=\frac{80\cdot 24}{20}-36=60$ *кг* (см. табл.).

	Исходный сплав	Новый сплав	
Цинк	36 *кг* / 60 %	$36+x$ *кг* / 80 %	$36+x$ *кг* – 80 % 24 *кг* – 20 %
Медь	24 *кг* / 40 %	24 *кг* / 20 %	Масса компонента не меняется
Сплав	60 *кг* / 100 %	$60+x$ *кг* / 100 %	

Ответ: 60 *кг*.

В задачах на процентный прирост используются следующие понятия и формулы. Пусть некоторая величина A, меняющаяся со временем, имеет в начальный момент значение A_0, а через известный промежуток времени t_1 значение A_1. ***Абсолютным приростом величины*** A за время t_1 называется разность $A_1 - A_0$, ***относительным приростом величины*** A за время t_1 – отношение $\dfrac{A_1 - A_0}{A_0}$ и ***процентным приростом величины*** A за время t_1 – величина $\dfrac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\,\%$.

Обозначая процентный прирост величины A через $p\,\%$, получаем формулу, выражающую A_1 через A_0 и p, $A_1 = A_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$.

Если же величина A и далее через равные промежутки времени будет иметь процентный прирост p, то в момент времени $t_n = nt_1$ ее значение A_n будет равно:

а) $A_n = A_0\left(1 + \dfrac{pn}{100}\right)$ (формула ***простых процентов***); (в этом случае предполагается, что по истечении каждого промежутка времени прирост изымается.)

б) $A_n = A_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$ (формула ***сложных процентов***) (в этом случае доход за новый промежуток времени исчисляется с наращенной суммы).

Если величина A за время t_1 имеет процентный прирост $p_1\%$, на следующем этапе за время $t_2 - t_1$ (не обязательно равное t_1) – $p_2\%$, далее за время $t_3 - t_2$ – $p_3\%$ и т. д., то в момент времени t_n значение A_n будет равно

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Пример 4. *Выработка продукции предприятия за первый год работы возросла на p%, а за следующий год по сравнению с первоначальной возросла на 10 % больше, чем за первый год. Определить, насколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59 %?*

Решение. Обозначим через V_0 исходный годовой объем выработки предприятия. Тогда объем годовой выработки через год V_1 выражается формулой $V_1 = V_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, а объем годовой выработки через два года V_2 формулой

$$V_2 = V_1\left(1+\frac{p+10}{100}\right) = V_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p+10}{100}\right).$$

Согласно условию, $V_2 = V_0\left(1+\frac{48,59}{100}\right)$. Приравнивая правые части двух последних формул, получаем квадратное уравнение $p^2+210p-3859=0$, из которого находим $p=17$. ***Ответ:*** 17 %.

Полезно разобрать следующую задачу.

Пример 5. *Цена товара увеличилась на 25 %. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальное значение?*

Решение. Пусть N – первоначальная цена товара. Тогда после повышения она будет равна $N\left(1+\frac{25}{100}\right)=\frac{5}{4}N$. После понижения этой цены на x %, она должна равняться исходной, т. е. $\frac{5}{4}N\left(1-\frac{x}{100}\right)=N$. Отсюда $1-\frac{x}{100}=\frac{4}{5}$ и $x=20$.

Ответ: 20 %.

Рассмотрим более сложные задачи.

Пример 6. *На деньги, размещенные в трех банках, за год начисляется определенный процент, свой для каждого банка. Если пятую часть некоторой суммы положить в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк, то через год сумма вкладов превысит исходную сумму на 106 %. Если же четверть суммы положить в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, то через год сумма вкладов будет такой же, как и при размещении половины исходной суммы во втором банке, а остальных денег – в третьем банке. Наконец, при размещении всей суммы во втором банке через год вклад станет на 5 % больше, чем сумма вкладов в первом, втором и третьем банках, если разместить в них деньги в равных долях. Найти процент, начисляемый на вклады во втором банке.*

Решение. Пусть p_1, p_2 и p_3 – проценты, начисляемые в первом, втором и третьем банках соответственно, а n – исходная сумма. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}n\frac{p_1}{100}+\frac{4}{5}n\frac{p_2}{100}=1{,}06n, \\ \frac{1}{4}n\frac{p_1}{100}+\frac{3}{4}n\frac{p_2}{100}=\frac{1}{2}n\frac{p_2}{100}+\frac{1}{2}n\frac{p_3}{100}, \\ n\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=\frac{1{,}05}{3}\left(3n+n\frac{p_1}{100}+n\frac{p_2}{100}+n\frac{p_3}{100}\right). \end{cases}$$

Сокращая в системе на n, и, обозначая $x=\frac{p_1}{100}$, $y=\frac{p_2}{100}$, $z=\frac{p_3}{100}$ получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{4}{5}y=1{,}06, \\ \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z, \\ y=0{,}05+\frac{1{,}05}{3}(x+y+z). \end{cases}$$

Решая систему относительно y, получим $y=1{,}1$ или $p_2=110\%$.

Ответ: $p_2=110\%$.

Пример 7. *Два банка начисляют определенные проценты по вкладам (свои в каждом банке). Причем, первый из них начисляет проценты ежеквартально на всю лежащую на счете сумму, второй – начисляет проценты по вкладу в конце года. Если клиент положит на два года четверть имеющейся у него суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть – во второй, то его прибыль составит 40,08% от первоначальной суммы. Если же наоборот, три четверти исходной суммы – в первый, а оставшуюся часть – во второй, то через два года прибыль составит 70%. Какова будет его прибыль в процентах от первоначальной суммы, если он положит все деньги на один год в первый банк?*

Решение. Пусть n – сумма, имеющаяся у клиента, p_1 и p_2 – проценты, начисляемые по вкладу ежеквартально в первом банке и в конце года во втором. Положив все деньги на один год в первый банк, через год клиент получит сумму $n\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^4$. Его прибыль будет равна $n\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^4-n$, что в процентах от первоначальной суммы составит

$$p=\frac{n\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^4-n}{n}\cdot 100=\left(\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^4-1\right)\cdot 100.$$

Для ответа на поставленный в задаче вопрос необходимо сначала найти p_1.

Уравнение, соответствующее тому, что клиент положит на два года $n/4$ в первый банк, а оставшуюся часть – во второй и его прибыль через два года составит 40,08 % от n, будет иметь вид:

$$\frac{1}{4}n\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^8+\frac{3}{4}n\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=n\left(1+\frac{40,08}{100}\right).\ (1)$$

Для второго банка:

$$\frac{3}{4}n\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^8+\frac{1}{4}n\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2=n\left(1+\frac{70}{100}\right).\ (2)$$

Сократим в уравнениях (1) и (2) на n и объединим их в систему. В обозначениях $x=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^8$, $y=\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^2$ система примет вид

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=1+\frac{40,08}{100},\\ \frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y=1+\frac{70}{100}.\end{cases}$$

Освободимся от переменной y. Для этого, умножая второе уравнение системы на 3 и вычитая из него первое, получим

$$2x=3\left(1+\frac{70}{100}\right)-\left(1+\frac{40,08}{100}\right)\quad\Rightarrow\quad x=1,8496.$$

Отсюда $p=(\sqrt{x}-1)\cdot 100=(\sqrt{1,8496}-1)\cdot 100=(1,36-1)\cdot 100=36$.

Ответ: 36%.

Пример 8. *Вклад, находящийся в банке в течение года, возрастает на определенный процент, свой для каждого банка. В начале первого года $\frac{3}{5}$ некоторой суммы положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу первого года сумма вкладов составила* 1140 *единиц, а к концу второго года –* 1302 *единицы. Если бы в начале первого года в первый банк положили $\frac{2}{5}$, а оставшуюся часть исходной суммы во второй банк, то в конце первого года сумма вкладов составила бы* 1160 *единиц. Какой стала бы сумма вкладов к концу второго года*?

Решение. Пусть p_1 и p_2 – проценты, начисляемые в конце года первым и вторым банками соответственно, а n – размещаемая в них сумма. Обозначим через x и y коэффициенты, на которые умножаются по истечении года вклады в первом и втором банках: $x = 1 + \frac{p_1}{100}$, $y = 1 + \frac{p_2}{100}$. Из условий задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}nx + \frac{2}{5}ny = 1140, \\ \frac{3}{5}nx^2 + \frac{2}{5}ny^2 = 1302, \\ \frac{2}{5}nx + \frac{3}{5}ny = 1160. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на третье, получим:

$$\frac{3x+2y}{2x+3y} = \frac{57}{58} \text{ или } y = \frac{12}{11}x.$$

Исключая y из второго уравнения системы, получим $\frac{3}{5}nx^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{144}{121}\right)nx^2 = 1302$ или $nx^2 = 1310$. Тогда искомая величина равна

$$\frac{2}{5}nx^2 + \frac{3}{5}ny^2 = \frac{2}{5}nx^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{144}{121}\right)nx^2 = \frac{674}{605}nx^2 = \frac{674}{605}\cdot 1310 = 1348.$$

Ответ. 1348.

4. **Задачи с целочисленными неизвестными**

В задачах на целые числа часто используется следующее.

1. (*Основная теорема арифметики*). Любое натуральное число единственным образом (с точностью до порядка следования множителей) раскладывается в произведение простых чисел.

2. (*Форма записи числа цифрами*). Пусть $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ – цифры от 0 до 9, составляющие число. Тогда запись числа цифрами обозначается следующим образом – $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ (использован принцип позиционного значения цифр). Это означает, что

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 . \quad (4.1)$$

3. Если число q является делителем чисел n и m, то оно является делителем их суммы, разности и произведения.

4. Если произведение mn делится на q, а m взаимно просто с q, т. е. не имеет с ним общих простых делителей, то n делится на q ($m, n, q \in \mathbb{N}$).

Пример 1 **(Репетиционная работа к ЕГЭ прошлого года. В12).** *Найдите двузначное число, если оно в 2 раза больше произведения его цифр. Если переставить цифры этого числа в обратном порядке, то отношение полученного числа и данного будет равно* $\frac{7}{4}$.

Решение. Пусть $x-$ количество десятков, а $y-$ количество единиц данного числа $\overline{xy}$. Первое условие запишется следующим образом

$$10x + y = 2xy. \ (1)$$

Тогда второе условие запишется следующим образом

$$\frac{10y + x}{10x + y} = \frac{7}{4}.$$

Из уравнения (2) получаем $40y + 4x = 70x + 7y$ или $33y = 66x$, т.е. $y = 2x$.

Подставляя полученное выражение в уравнение (1) получаем $12x = 4x^2$. Так как данное число – двузначное, то $x \neq 0$. Следовательно, $x = 3$. Тогда $y = 6$ и 36 – искомое число. ***Ответ:*** 36.

Пример 2. *Даны два двузначных числа. Если большее число написать впереди меньшего и полученное четырехзначное число разделить на меньшее, то в частном получится 247, а в остатке 10. Если же меньшее число написать впереди большего и разделить полученное число на большее, то в частном получится 41, а в остатке 20. Найти сумму данных двузначных чисел.*

Решение. Пусть меньшее число – $\overline{xy}$, большее – $\overline{zt}$. Написав большее впереди меньшего получим $\overline{ztxy} = 1000z + 100t + 10x + y$. Запишем тот факт, что при делении полученного числа на меньшее в частном получится 247, а в остатке 10:

$$1000z + 100t + 10x + y = 247(10x + y) + 10.$$

Аналогично во втором случае:

$$1000x + 100y + 10z + t = 41(10z + t) + 20$$

Обозначив $s = \overline{zt} = 10z + t$, $u = \overline{xy} = 10x + y$, получим систему

$$\begin{cases} 100s + u = 247u + 10, \\ 100u + s = 41s + 20 \end{cases} \Rightarrow \quad s = 37, u = 15.$$

Ответ: 37 и 15.

Пример 3. *Шестизначное число A делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.*

Решение. Пусть $a-$ последняя цифра числа A, а $B-$ число, полученное из A вычеркиванием последней цифры. Тогда $A=10B+a$. Число $B-$ пятизначное. Так как $99\,999=13\cdot 7692+3$, то число $99\,996$ делится на 13. Числа A вида $\overline{999\,96a}$ не делятся на 17, так как наибольшее из них $999\,969$ при делении на 17 дает в остатке 12, а наименьшее $999\,960$ – дает в остатке 3. Значит $B=99\,996$ не подходит.

Тогда возьмем $B=99\,996-13=99\,983$. Если взять число A вида $\overline{999\,83a}$, то $999\,839=17\cdot 58\,814+1$. Следовательно, подходит $999\,838$. Ясно, что оно наибольшее. ***Ответ.*** $999\,838$.

Пример 4. *Автомобильный завод выпустил в первый день месяца некоторое количество автомобилей. Каждый следующий рабочий день дневной выпуск возрастал на 3 автомобиля ежедневно, и месячный план – 287 автомобилей – был выполнен досрочно, причем за целое число дней. После этого ежедневно выпускался 41 автомобиль. На сколько процентов был перевыполнен месячный план выпуска автомобилей, если в месяце было 26 рабочих дней.*

Решение. Пусть x – количество автомобилей, выпущенных заводом в первый рабочий день, n – количество дней, за которое был выполнен план ($n < 26$). Условие того, что план был выполнен за n дней запишется в виде:

$$x + (x+3) + ... + (x + (n-1)3) = nx + 3(1 + 2 + ... + (n-1)).$$

Отсюда $nx + \dfrac{3n(n-1)}{2} = 287$ или $(2x + 3(n-1))n = 287 \cdot 2.$

Число 287 единственным образом раскладывается в произведение сомножителей 7 и 41, т. е. $n \cdot (2x + 3(n-1)) = 7 \cdot 41 \cdot 2$. Имеется только четыре варианта разложения правой части этого равенства на множители:

1) $1 \cdot 574$; 2) $2 \cdot 287$; 3) $7 \cdot 82$; 4) $14 \cdot 41$.

При $n = 1$ получаем $2x = 571$, т.е. целочисленных решений нет; при $n = 2$ получаем $x = 142$; при $n = 7$ получаем $x = 32$; при $n = 14$ получаем $x = 1$.

Тогда, при $n = 2$ дополнительно было выпущено $41(26 - n) = 41 \cdot 24$ автомобиля, и план был перевыполнен на $\dfrac{41 \cdot 24}{287} \cdot 100\% = \dfrac{24}{7} \cdot 100\% = 342\dfrac{6}{7}\%$;

при $n = 7$ – перевыполнен на $\dfrac{41 \cdot 19}{287} \cdot 100\% = 271\dfrac{3}{7}\%$;

при $n = 14$ – перевыполнен на $\dfrac{41 \cdot 12}{287} \cdot 100\% = 171\dfrac{3}{7}\%$..

Ответ: $342\dfrac{6}{7}\%$; $271\dfrac{3}{7}\%$; $171\dfrac{3}{7}\%$.

Пример 5. *Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4 %, на втором – 12,5 %, на третьем – $\frac{100}{7}$ % и на четвертом – $\frac{50}{3}$ %. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 64 %. Определить продолжительность периода реконструкции.*

Решение. Пусть x, y, z и t – продолжительность соответственно первого, второго третьего и четвертого этапов (в месяцах), где x, y, z и t – натуральные числа. Если первоначально объем производства был равен V, то после реконструкции он будет равен

$$V\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)^x\cdot\left(1-\frac{25}{2\cdot 100}\right)^y\cdot\left(1-\frac{100}{7\cdot 100}\right)^z\cdot\left(1-\frac{50}{3\cdot 100}\right)^t=V\cdot\left(1-\frac{64}{100}\right).$$

Сократив на V, получим $\left(\frac{24}{25}\right)^x\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^y\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^z\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^t=\frac{9}{25}$.

$$\left(\frac{2^3\cdot 3}{5^2}\right)^x\cdot\left(\frac{7}{2^3}\right)^y\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{7}\right)^z\cdot\left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)^t=\frac{3^2}{5^2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2^{3x-3y+z-t}\cdot 3^{x+z-t}\cdot 5^{-2x+t}\cdot 7^{y-zt}=2^0\cdot 3^2\cdot 5^{-2}\cdot 7^0.$$

Так как x, y, z и t – натуральные числа, а 2, 3, 5 и 7 – простые числа, то в силу единственности разложения натурального числа на простые множители получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3x-3y+z-t=0,\\ x+z-t=2,\\ -2x+t=-2,\\ y-z=0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x=2,\ y=2,\ z=2,\ t=2.$$

Следовательно, весь период реконструкции длился 8 месяцев.

Ответ: 8 месяцев.

Иногда при решении задач на целые числа число получающихся уравнений не достаточно для выбора однозначного ответа и, поэтому на одном из этапов решения приходится использовать перебор получающихся вариантов, чтобы отобрать решение, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Пример 6. *В финальном забеге соревнований по кроссу оказалось, что число спортсменов, выполнивших мастерский норматив меньше $\frac{6}{13}$, но больше $\frac{7}{16}$ от общего количества, закончивших дистанцию. Какое минимальное число спортсменов закончило дистанцию?*

Решение. Пусть N – число спортсменов, закончивших дистанцию, а n – число спортсменов, выполнивших мастерский норматив. Тогда, согласно условия, N и n удовлетворяют неравенству

$$\frac{7}{16} < \frac{n}{N} < \frac{6}{13} \text{ или } \frac{16}{7} > \frac{N}{n} > \frac{13}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{7}n > N > \frac{13}{6}n.$$

Подберем такое наименьшее значение n, чтобы в интервале $\left(\frac{16}{7}n; \frac{13}{6}n\right)$ содержалось хотя бы одно целое число N. Перебором, начиная с $n=1$, получим, что при $n=4$ такое N, удовлетворяющее неравенству $9\frac{1}{7} > N > 8\frac{2}{3}$ существует и $N=9$.

Ответ: 9 спортсменов.

Пример 7. *Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пяти и девятиэтажных домов?*

Решение. Пусть построено x – девятиэтажных и y – пятиэтажных домов. Из условия задачи получим систему неравенств

$$\begin{cases} x < y, \\ 2x + y > 24, \\ x + 2y < 27. \end{cases}$$

Из второго неравенства получаем $x > \dfrac{24 - y}{2}$, из третьего $x < 27 - 2y$, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{24 - y}{2} < x < y, \\ \dfrac{24 - y}{2} < x < 27 - 2y \end{cases} \quad (*) \text{ или, освобождаясь от } x, \quad \begin{cases} \dfrac{24 - y}{2} < y, \\ \dfrac{24 - y}{2} < 27 - 2y. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\begin{cases} 8 < y, \\ y < 10. \end{cases}$ Поскольку $y \in \mathbf{Z}$, то $y = 9$.

Из первого неравенства системы (*) получаем $7{,}5 < x < 9$ и $x \in \mathbf{Z}$, т. е. $x = 8$. ***Ответ:*** 9 пятиэтажных и 8 девятиэтажных.

5. Формула включений и исключений

Наряду с методом математической индукции, ***формула*** (принцип) ***включений и исключений*** является важным математическим инструментом. Она позволяет, зная число элементов в каждом из данных конечных множеств, найти число элементов другого множества, составленного из данных множеств с помощью операций объединения и пересечения.

Пусть A – конечное множество. Обозначим через $|A|$ число его элементов, т. е. если множество содержит n элементов, то $|A| = n$.

Если множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов. Обозначим $A_{12} = A_1 \cap A_2$. Легко убедиться, что

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_{12}|. \qquad (5.1)$$

Это одна из важнейших формул комбинаторики, которую называют *формулой сложения*. С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа множеств.

Например, для трех множеств (обозначая $A_{ij} = A_i \cap A_j$, где $i = 1, 2;\ j = 2, 3;\ i \neq j,\ A_{123} = A_1 \cap A_2 \cap A_{23}$):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| =$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{23}| - |A_{12} \cup A_{13}|.$$

Учитывая, что $A_{12} \cap A_{13} = A_{123}$, окончательно получаем

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{123}|. \qquad (5.2)$$

Полученная формула, как и формула (1), является частным случаем общей *формулы включений и исключений* для n конечных множеств $A_1, A_2, ..., A_n$.

Пример 1. *На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников читал книги A, B и C. Результаты опроса оказались таковы: книгу A читали 25 учащихся, книгу B – 22, книгу C – также 22. Книги A или B читали 33 ученика, A или C – 32, B или C – 31. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих книг?*

Решение. Дано $|A|=25$, $|B|=|C|=22$, $|A\cup B|=33$, $|A\cup C|=32$, $|B\cup C|=31$, $|A\cap B\cap C|=10$. Так как $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, то

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=25+22-33=14.$$

Аналогично имеем $|A\cap C|=|A|+|C|-|A\cup C|=25+22-32=15$; $|B\cap C|=|B|+|C|-|B\cup C|=13$.

Тогда число учащихся, прочитавших хотя бы одну книгу, будет равно

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-$$
$$|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$
$$=25+22+22-14-15-13+10=37.$$

Следовательно, число учащихся, не прочитавших ни одной из этих книг, равно

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=40-|A\cup B\cup C|=3.$$

Далее найдем число учащихся, прочитавших по одной книге. Так число учащихся, прочитавших только книгу A равно

$$|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=25-14-15+10=6;$$

только B

$$|B|-|A\cap B|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=22-14-13+10=5,$$

только книгу C

$$|C|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=22-15-13+10=4.$$

Отсюда число учащихся, прочитавших лишь одну книгу (из этих трех), равно $6+5+4=15$.

Ответ. Только одну книгу прочли 15 учащихся; ни одной – 3.

Иногда при решении подобных задач можно при некоторых дополнительных условиях обойтись без применения формул включения и исключения, а использовать таблицы.

Пример 2. *В соревнованиях по легкой атлетике 82 % от числа участников выполнили норматив II-го разряда по прыжкам в высоту, 65 % – по прыжкам в длину и 70 % – в тройном прыжке. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив хотя бы по двум дисциплинам. Спортсмены, выполнившие норматив по всем дисциплинам, мечтают стать мастерами спорта. Какой процент участников собирается стать мастерами спорта, и какой – не выполнил норму II-го разряда в прыжках в длину?*

Решение. Пусть число участников равно n. Множество всех участников в соответствии с условиями задачи разбивается на четыре подмножества (см. табл.).

Выполнили норму в прыжках в высоту	Выполнили норму в прыжках в длину	Выполнили норму в тройном прыжке	
+	+	–	x
+	–	+	y
–	+	+	z
+	+	+	t

Пусть тогда x – количество участников, не выполнивших выполнили норматив II-го разряда по прыжкам в высоту, y– по прыжкам в длину, z– в тройном прыжке и t – выполнивших норматив по всем дисциплинам. Тогда в соответствии с условиями задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+t=0,82n, \\ x+z+t=0,65n, \\ y+z+t=0,7n, \\ x+y+z+t=n. \end{cases}$$

Отсюда получаем $t=0,17n$, а $y=0,35n$. ***Ответ.*** 17% и 35%.