# Неравенства С3, С5. Подготовка к ЕГЭ 2011.

(*материал для лекции для учителей* 18.04.2011)

***Прокофьев А.А.,*** aaprokof@yandex.ru

## Задачи С3

Основные способы решения:

1. Решение неравенства на промежутках.

2. Упрощение неравенства и сведение его к простейшему логарифмическому или рациональному неравенству.

   2а. Метод рационализации.

3. Метод замены.

4. Метод оценки.

   4а. Использование неравенства Коши.

**Пример 1. (МИОО, 2011).** *Решите неравенство*

$$\frac{2\log_2(x+4)+1}{\log_2(x+4)-1} \ge \frac{2\log_2(30-x)+1}{\log_2(30-x)-1}.$$

***Решение.*** Запишем неравенство в следующим образом:

$$\frac{2(\log_2(x+4)-1)+3}{\log_2(x+4)-1} \ge \frac{2(\log_2(30-x)-1)+3}{\log_2(30-x)-1}$$

или

$$2+\frac{3}{\log_2(x+4)-1} \ge 2+\frac{3}{\log_2(30-x)-1}.$$

Перенося все в левую часть и приводя дробные выражения к общему знаменателю, получим

$$\frac{\log_2(30-x)-\log_2(x+4)}{(\log_2(x+4)-1)(\log_2(30-x)-1)} \ge 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\log_2(30-x)-\log_2(x+4)}{(\log_2(x+4)-1)(\log_2(30-x)-1)}$. Область определения функции задается условиями $\begin{cases} 30-x>0, \\ x+4>0, \\ \log_2(x+4)\ne 1, \\ \log_2(30-x)\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<30, \\ x>-4, \\ x\ne -2, \\ x\ne 28. \end{cases}$

Отсюда $D(f)=(-4;-2)\cup(-2;28)\cup(28;30)$.

Найдем на $D(f)$ нули функции $f$ из условия равенства нулю числителя.

$\log_2(30-x)-\log_2(x+4)=0$, $\log_2(30-x)=\log_2(x+4)$, $30-x=x+4$, $x=13$.

На $D(f)$ запишем функцию в виде $f(x)=\dfrac{\log_2\dfrac{30-x}{x+4}}{\log_2\dfrac{x+4}{2}\cdot\log_2\dfrac{30-x}{2}}$. Область определения функции $f$ состоит из четырех промежутков. Методом «опорной точки» определяем знак функции на каждом из этих промежутков. Для этого берем, например, значения $x$, равные $-3$, 0, 14, 29.

$$f(-3)=\frac{\log_2 33}{-\log_2 16{,}5}<0,\quad f(0)=\frac{\log_2 7{,}5}{\log_2 15}>0,\quad f(14)=\frac{\log_2\frac{8}{9}}{3\log_2 9}<0,\quad f(29)=\frac{-\log_2 33}{-\log_2 16{,}5}>0.$$

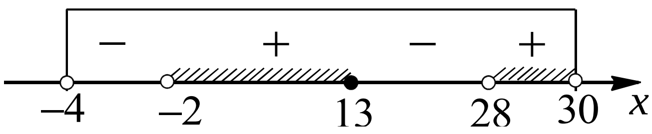

Рис. 1

***Ответ.*** $(-2;13]\cup(28;30)$.

**Пример 2. (МИОО 2011).** *Решите неравенство*

$$\log_{5-x}(x^2-14x+49)\le 2\log_{5-x}(8x-x^2-7)-2.$$

***Решение.*** Заметим, что $x^2-14x+49=(x-7)^2$, $8x-x^2-7=-(x-1)(x-7)$. Область определения данного неравенства задается условиями

$$\begin{cases}5-x>0,\\ 5-x\ne 1,\\ x-7\ne 0,\\ (x-1)(x-7)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5,\\ x\ne 4,\\ x\ne 7,\\ 1<x<7\end{cases}\Leftrightarrow\quad x\in(1;4)\cup(4;5).$$

Перепишем данное неравенство в виде

$$\log_{5-x}(x-7)^2\le\log_{5-x}\left((x-1)^2(x-7)^2\right)-\log_{5-x}(5-x)^2,$$

$$\log_{5-x}(5-x)^2\le\log_{5-x}\left((x-1)^2(x-7)^2\right)-\log_{5-x}(x-7)^2,$$

$$\log_{5-x}(5-x)^2\le\log_{5-x}(x-1)^2\quad(1)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0<5-x<1$, т.е $4<x<5$. Тогда для неравенства (1) получаем

$$(5-x)^2\ge(x-1)^2\Leftrightarrow(5-x)^2-(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(6-2x)\cdot 4\ge 0\Leftrightarrow x\le 3.$$

Нет решений.

2. Пусть $5-x>1$, т.е $x<4$. Тогда для неравенства (1) получаем

$$(5-x)^2\le(x-1)^2\Leftrightarrow(5-x)^2-(x-1)^2\le 0\Leftrightarrow(6-2x)\cdot 4\le 0\Leftrightarrow x\ge 3.$$

С учетом ОДЗ получаем $x\in[3;4)$.

***Ответ.*** $[3;4)$.

**Пример 3. (МИОО, апрель 2011).** *Решите неравенство*

$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le x-1.$$

***Решение.*** Область определения данного неравенства задается условием $2^x-\frac{1}{6}>0$. Отсюда, логарифмируя по основанию 2 обе части неравенства $2^x>\frac{1}{6}$, получаем $x>-\log_2 6$.

Преобразуем левую часть исходного неравенства:

$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)=\log_3 6^{x+1}+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)=\log_3\left(6\cdot 12^x-6^x\right).$$

Получаем $\log_3\left(6\cdot 12^x-6^x\right)\le x-1 \iff \log_3\left(6\cdot 12^x-6^x\right)\le (x-1)\cdot\log_3 3 \iff$ $\iff \log_3\left(6\cdot 12^x-6^x\right)\le \log_3 3^{x-1} \iff 6\cdot 12^x-6^x\le 3^{x-1}$.

Деля в последнем неравенстве на $3^{x-1}$, получим $18\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-1\le 0$.

Пусть $t=2^x$, где $t>0$. Тогда, решая квадратичное неравенство $18\cdot t^2-3\cdot t-1\le 0$, получим $0<t\le\frac{1}{3}$. Выполняя обратную замену, отсюда получаем $0<2^x\le\frac{1}{3}$, т.е. $x\le-\log_2 3$.

Учитывая условие $x>-\log_2 6$, запишем ответ $-\log_2 6<x\le-\log_2 3$.

***Ответ.*** $(-\log_2 6; -\log_2 3]$.

**Пример 4.** *Решите неравенство*

$$x \ge \log_2\left(101\cdot 10^x - 10^{2+2x}\right) - \log_5\left(101\cdot 2^x - 5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

***Решение.*** Преобразуем неравенство, выполняя равносильные преобразования.

$$x \ge \log_2 10^x + \log_2\left(101 - 100\cdot 10^x\right) - \log_5 2^x - \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right),$$

$$x \ge \underbrace{\log_2 2^x}_{=x} + \log_2 5^x - \log_5 2^x + \log_2\left(101 - 100\cdot 10^x\right) - \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right),$$

$$x\left(\frac{1}{\log_5 2} - \log_5 2\right) + \left(\frac{\log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right)}{\log_5 2} - \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right)\right) \le 0,$$

$$x\left(\frac{1-\log_5^2 2}{\log_5 2}\right) + \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right)\cdot\left(\frac{1-\log_5 2}{\log_5 2}\right) \le 0.$$

Так как $\log_5 2 > 0$ и $1-\log_5 2 > 0$, сокращая на эти числа, получим

$$x\left(1+\log_5 2\right) + \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right) \le 0,$$

$$\log_5 10^x + \log_5\left(101 - 100\cdot 10^x\right) \le 0,$$

$$\log_5\left(101\cdot 10^x - 100\cdot 10^{2x}\right) \le 0.$$

Пусть $t = 10^x$, где $t > 0$. Тогда получаем неравенство

$$\log_5\left(101\cdot t - 100\cdot t^2\right) \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < 101\cdot t - 100\cdot t^2 \le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 101\cdot t - 100\cdot t^2 > 0, \\ 101\cdot t - 100\cdot t^2 \le 1. \end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $t\cdot\left(t - \dfrac{101}{100}\right) < 0$, т.е. $0 < t < \dfrac{101}{100}$. Из второго – получаем $100\cdot t^2 - 101\cdot t + 1 \ge 0$, т.е. $t \in \left(-\infty; \dfrac{1}{100}\right] \cup [1; +\infty)$.

Отсюда с учетом $t > 0$, имеем $t \in \left(0; \dfrac{1}{100}\right] \cup \left[1; \dfrac{101}{100}\right)$.

Выполним обратную замену $\left[\begin{array}{l} 0 < 10^x \le \dfrac{1}{100}, \\ 1 \le 10^x < \dfrac{101}{100} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ 0 \le x < -2 + \lg 101. \end{array}\right.$

***Ответ.*** $(-\infty; -2] \cup [0; -2 + \lg 101)$.

**Замечание.** Можно было заметить, что $x = \log_5 5^x$ и от неравенства $\log_5 5^x \ge \log_2\left(101\cdot 10^x - 10^{2+2x}\right) - \log_5\left(101\cdot 2^x - 5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right)$ или придти к неравенству $\log_5\left(101\cdot 10^x - 10^{2+2x}\right) \ge \log_2\left(101\cdot 10^x - 10^{2+2x}\right)$. Далее рассмотреть неравенство $\log_5 t \ge \log_2 t$, где $t = 101\cdot 10^x - 10^{2+2x}$.

**Пример 5.** *Решите неравенство*

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x}\ge\frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\cdot\log_{1,9}x}.$$

***Решение.*** Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x-1>0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ x\ne 10,\\ (x-10)^2\ne 1\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases} x>1,\\ x\ne 10,\\ x\ne 11,\\ x\ne 9.\end{cases}$$

Учитывая, что при $x>1$ выражение $\log_{1,9}x$ положительно, преобразуем данное неравенство на его области определения $\dfrac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2}\ge 0$.

Далее используем метод рационализации: $\dfrac{\log_3 81-\log_3(x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)}\ge 0$;

$$\frac{4-\log_3^2(x-1)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;\quad \frac{\left(\log_3 9-\log_3(x-1)\right)\left(\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;$$

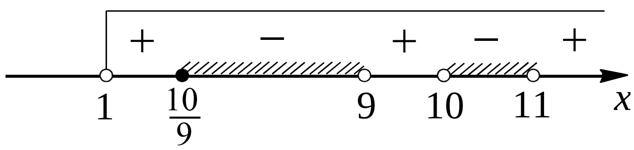

Рис. 2

$$\frac{(9-x+1)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;$$

$$\frac{(x-10)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)}\le 0.$$

***Ответ.*** $\left[\dfrac{10}{9};9\right)\cup(10;11)$.

**Замечание. 1.** Можно было бы обойтись без рационализации и решать по схеме $\dfrac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2}\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}81-(x-1)^{\log_3(x-1)}\ge 0,\\ \log_{2,1}(x-10)^2>0;\end{cases}\\ \begin{cases}81-(x-1)^{\log_3(x-1)}\le 0,\\ \log_{2,1}(x-10)^2<0.\end{cases}\end{array}\right.$

**2.** Можно было решать методом интервалов. $f(x)=\dfrac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2}$. $f(1{,}1)=$

$=\dfrac{81-0{,}1^{\log_3 0{,}1}}{\log_{2,1}8{,}9^2}=\dfrac{81-10^{1/\lg 3}}{\log_{2,1}8{,}9^2}<0$ $\left(\lg 3<\lg\sqrt{10}=0{,}5,\ \dfrac{1}{\lg 3}>2\right)$. $f(4)=\dfrac{81-3^{\log_3 3^3}}{\log_{2,1}36}>0$,

$f(9{,}5)=\dfrac{81-8{,}5^{\log_3 8{,}5}}{\log_{2,1}0{,}25}>0$, $f(10{,}5)=\dfrac{81-9{,}5^{\log_3 9{,}5}}{\log_{2,1}0{,}25}<0$, $f(28)=\dfrac{81-27^3}{\log_{2,1}324}<0$.

**Пример 6. (МИОО, апрель 2011).** *Решите неравенство*

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10}\ge 0.$$

***Решение.*** Запишем неравенство в следующей форме:

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(8(x^2+3x)-16)+\log_2(x^2+3x)^2}{(x^2+3x)-10}\ge 0.$$

Пусть $t=x^2+3x$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(8t-16)+\log_2 t^2}{t-10}\ge 0 \text{ или } \frac{\log_2 t^2-\log_2(8t-16)}{t-10}\ge 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases}\log_2 t^2-\log_2(8t-16)\ge 0,\\ t-10>0;\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}\log_2 t^2-\log_2(8t-16)\le 0,\\ t-10<0.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решим (1). Решим неравенство первое неравенство (1).

$$\log_2 t^2-\log_2(8t-16)\ge 0 \iff \log_2 t^2\ge\log_2(8t-16) \iff$$
$$\iff \begin{cases}t^2\ge 8t-16,\\ 8t-16>0\end{cases} \iff \begin{cases}(t-4)^2\ge 0,\\ t>2.\end{cases}$$

Отсюда получаем $t>2$. С учетом второго неравенства системы (1) $t-10>0$ или $t>10$, получаем решение (1) $t>10$.

Решим (2). Решим неравенство первое неравенство (1).

$$\log_2 t^2-\log_2(8t-16)\le 0 \iff \log_2 t^2\le\log_2(8t-16) \iff$$
$$\iff \begin{cases}t^2\le 8t-16,\\ 8t-16>0\end{cases} \iff \begin{cases}(t-4)^2\le 0,\\ t>2.\end{cases}$$

Отсюда получаем $t=4$. С учетом второго неравенства системы (2) $t-10<0$ или $t<10$, получаем решение (2) $t=4$.

Объединяя полученные решения и выполняя обратную замену, получим решение исходного неравенства $\begin{cases}t=4,\\ t>10\end{cases}$ или $\begin{cases}x^2+3x=4,\\ x^2+3x>10.\end{cases}$

Отсюда получаем $(-\infty;-5)\cup\{-4\}\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$.

***Ответ.*** $(-\infty;-5)\cup\{-4\}\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$.

**Пример 7. (МИОО, апрель 2011).** *Решите неравенство*

$$\frac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)} \le \frac{(4\cdot 2^{(1+\lg x)})^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0{,}1x)}.$$

***Решение.*** Запишем неравенство в следующим образом:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(2+\lg x)^2\cdot(\lg x-1)} \le \frac{4^{1+\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)\cdot(1+\lg x)}}{4(2+\lg x)^2\cdot(\lg x-1)}$$

или

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{\lg x}}{(2+\lg x)^2\cdot(\lg x-1)} \le \frac{4^{\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)\cdot(1+\lg x)}}{(2+\lg x)^2\cdot(\lg x-1)}.$$

Сделаем замену $t=\lg x$. Тогда неравенство будет иметь вид

$$\frac{2^{1+t}\cdot 7^t}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \le \frac{2^{2t}\cdot 2^{(1+t)^2}}{(2+t)^2\cdot(t-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+t}$, получим

$$\frac{7^t}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \le \frac{2^{t^2+3t}}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \text{ или } \frac{7^t-2^{t^2+3t}}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \ge 0.$$

Используя основное логарифмическое тождество, запишем $7^t$ как $7^t=2^{t\log_2 7}$.

Тогда неравенство будет иметь вид $\dfrac{2^{t\log_2 7}-2^{t^2+3t}}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \ge 0$.

Рассмотрим выражение $2^{t\log_2 7}-2^{t^2+3t}=2^{t^2+3t}(2^{t\log_2 7-t^2-3t}-1)$. Множитель $2^{t^2+3t}$ положителен, поэтому знак исходного выражения совпадает со знаком второго множителя $2^{t\log_2 7-t^2-3t}-1$.

Если $t\log_2 7-t^2-3t>0$, то $2^{t\log_2 7-t^2-3t}>1$ и $2^{t\log_2 7-t^2-3t}-1>0$,

если $t\log_2 7-t^2-3t=0$, то $2^{t\log_2 7-t^2-3t}-1=0$,

если $t\log_2 7-t^2-3t<0$, то $2^{t\log_2 7-t^2-3t}<1$ и $2^{t\log_2 7-t^2-3t}-1<0$.

Следовательно,

$$\frac{2^{t\log_2 7}-2^{t^2+3t}}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t\log_2 7-t^2-3t}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t(t-(\log_2 7-3))}{(2+t)^2\cdot(t-1)} \ge 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем $t<-2$, $-2<t\le\log_2 7-3$, $0\le t<1$.

Выполняя обратную замену, получим

$$\lg x<-2,\ -2<\lg x\le\log_2 7-3,\ 0\le\lg x<1.$$

Тогда $0<x<0{,}01$, $0{,}01<x\le 10^{\log_2 7-3}$, $1\le x<10$.

***Ответ.*** $(0;0{,}01)\cup\left(0{,}01;10^{\log_2\frac{7}{8}}\right]\cup[1;10)$.

**Пример 8. (МИОО, 2011).** *Решите неравенство*

$$\frac{\log^2_{2x-3}\dfrac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}(9x^2-30x+25)+7}{2\cdot\log_{2x-3}(6x^2-19x+15)-1}\le 3.$$

***Решение.*** Так как $6x^2-19x+15=(2x-3)(3x-5)$ и в соответствии с определение логарифма $2x-3>0$, $3x-5>0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log^2_{2x-3}(3x-5)+2\log_{2x-3}(3x-5)+7}{2\cdot\left(1+\log_{2x-3}(3x-5)\right)-1}\le 3.$$

Пусть $t=\log_{2x-3}(3x-5)$. Тогда получаем $\dfrac{t^2+2t+7}{2t+1}\le 3$, т.е. $\dfrac{(t-2)^2}{2t+1}\le 0$. Решение последнего неравенства есть $t\in(-\infty;-0{,}5)\cup\{2\}$.

Выполняя обратную замену, получаем $\left[\begin{array}{l}\log_{2x-3}(3x-5)=2,\\ \log_{2x-3}(3x-5)<-0{,}5.\end{array}\right.$

Решим уравнение совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}3x-5=(2x-3)^2,\\ 2x-3>0,\\ 2x-3\ne 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=\dfrac{7}{4},\end{array}\right.\\ x>1{,}5,\\ x\ne 2\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{7}{4}.$$

Решим неравенство совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5)<-0{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \log_{2x-3}\left((3x-5)^2(2x-3)\right)\le 0.$$

В последнем неравенстве при $2x-3>1$, т.е. $x>2$, получаем $(3x-5)^2(2x-3)<1$, что неверно, так как в этом случае и $3x-5>1$.

При $0<2x-3<1$, т.е. при $1{,}5<x<2$, получаем $(3x-5)^2(2x-3)>1$, что также невозможно, так как $-0{,}5<3x-5<1$ и в этом случае произведение $(3x-5)^2(2x-3)<1$.

***Ответ.*** $\dfrac{7}{4}$.

**Пример 9.** *Решите неравенство*

$$\log_{\frac{1}{2}} 5+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\right)\le 0.$$

***Решение.*** **1.** Переходим к целым основаниям

$$\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_2\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\right)\le\log_2 5,$$

$$\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+6}+1\right)\cdot\frac{\log_2\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\right)}{\log_2 5}\le 1,$$

$$\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+6}+1\right)\cdot\log_5\left(\frac{1}{2}x^2+2x+7\right)\le 1.$$

**2.** Выделяем полные квадраты

$$\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}(x+2)^2+4}+1\right)\cdot\log_5\left(\frac{1}{2}(x+2)^2+5\right)\le 1 \qquad (1)$$

**3.** Оценим левую часть неравенства (1). Так как при всех значениях $x$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}(x+2)^2\ge 0,\ \frac{1}{2}(x+2)^2+4\ge 4,\ \sqrt{\frac{1}{2}(x+2)^2+4}\ge 2,\ \sqrt{\frac{1}{2}(x+2)^2+4}+1\ge 3,$$

$$\frac{1}{2}(x+2)^2+5\ge 5,$$

то $\log_3\left(\sqrt{\frac{1}{2}(x+2)^2+4}+1\right)\ge\log_3 3=1$ и $\log_5\left(\frac{1}{2}(x+2)^2+5\right)\ge\log_5 5=1$.

Левая часть неравенства (1) больше или равна 1, причем равенство достигается только в случае если $(x+2)^2=0$, т.е. при $x=-2$.

При других значениях $x$ левая часть неравенства (1) будет больше 1, т.е. неравенство (1) не будет выполняться.

***Ответ.*** $x=-2$.

**Пример 10.** *Решите неравенство* $5^{\log_x 2}\log_2 x+5^{\log_2 x}\log_x 2\le 10$.

***Решение.*** Рассмотрим два случая.

1. Пусть $0<x<1$. Тогда $\log_x 2<0$ и $\log_2 x<0$. Следовательно, левая часть данного неравенства отрицательна и неравенство выполняется при всех таких $x$.

1. Пусть $x>1$. Тогда, воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел:

$$5^{\log_x 2}\log_2 x+5^{\log_2 x}\log_x 2\ge 2\sqrt{5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x\cdot 5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2}=$$
$$=2\sqrt{5^{\log_x 2+\log_2 x}\cdot\log_2 x\cdot\log_x 2}=2\sqrt{5^{\log_x 2+\log_2 x}}\ge 2\sqrt{5^2}=10$$

Тут учтено, что $\log_2 x\cdot\log_x 2=1$, $\log_x 2+\log_2 x=\dfrac{1}{\log_2 x}+\log_2 x\ge 2$, причем равенство в последнем неравенстве достигается в случае, если $\log_2 x=1$, т.е. при $x=2$.

Следовательно, левая часть исходного неравенства не меньше 10 и возможет только случай равенства при $x=2$.

***Ответ.*** $(0;1)\cup\{2\}$.