Лекция 12.01.2010

Методика обучения математике по учебнику для 10 класса «Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень»

Тема: «Предел и непрерывность функции. Исследование функции с помощью производной»

Лектор Прокофьев А.А. aaprokof@yandex.ru

Ключевые понятия:

Формула общего члена последовательности, ε-окрестность точки,
предел последовательности, сходящаяся и расходящаяся последовательности, бесконечно малая последовательность, теорема Вейерштрасса.

Определение. Числовая последовательность – это функция, область определения которой есть множество **N** всех натуральных чисел; множество значений этой функции, т.е. совокупность чисел x_n, $n \in \mathbf{N}$, называют *множеством значений этой последовательности*.

Последовательность может быть задана с помощью формулы вида

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N},$$

выражающей x_n через номер n, например $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = 8 - 4n^2 - 4n, n \in \mathbf{N}$.

В главе IX (учебника и задачника) решаются примеры на запись формулы общего члена, определение свойств (ограниченность, монотонность). В ряде примеров полезно использовать геометрическое изображение значений $\{x_n\}$ на числовой прямой или плоскости.

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

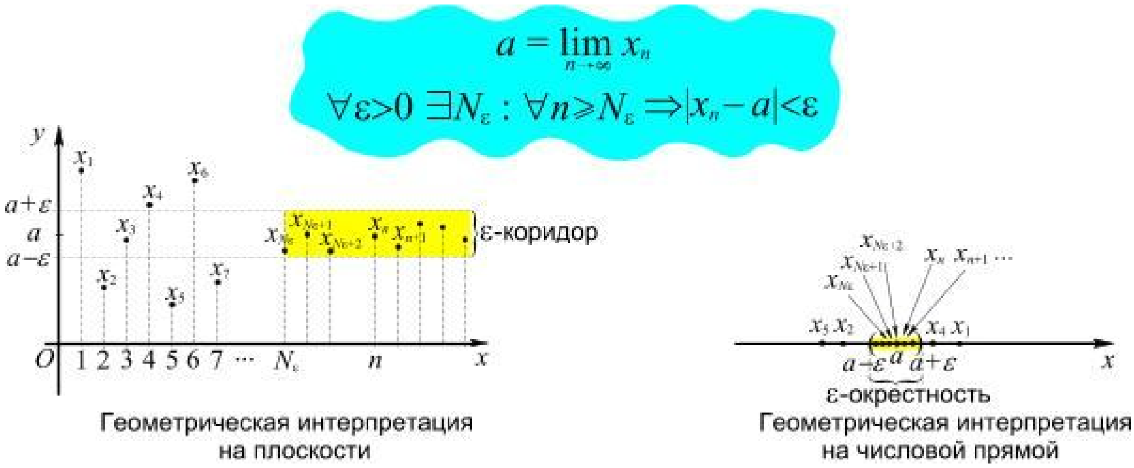


Рис. 1

Желательно продемонстрировать учащимся оба способа геометрической интерпретации. Обратить внимание, что вне интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ находится не более $N_\varepsilon - 1$. В дальнейшем это используется для доказательства свойств предела последовательности. Полезно на простых примерах составить таблицу зависимости $N(\varepsilon)$. В случае $x_n = \dfrac{1}{n}$ получаем $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Непосредственное вычисление предела последовательности или доказательство того, что его не существует

Пример 1. Вычислить предел последовательности $1, 2/3, 3/5, 4/7, \ldots$.

Решение. $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ – формула общего члена этой последовательности. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$, т. е. что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall n\geq N\ \ \left|\dfrac{n}{2n+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Из последнего неравенства получаем $n\geq\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$. Число $\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}$ в общем случае не натуральное, поэтому возьмем в качестве N натуральное число, превышающее его. Например, $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}-\dfrac{1}{2}\right]+1$. Здесь $[x]$ обозначает *целую часть* числа x. Упростив формулу для $N(\varepsilon)$, получим $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon}+\dfrac{1}{2}\right]$.

Необходимое условие сходимости бесконечной числовой последовательности: для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Это условие не является достаточным, например, последовательность $x_n=(-1)^n$ ограниченная, но не сходящаяся.

Бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1. Сумма (разность, произведение) двух (любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

Необходимо отметить связь между бесконечно малыми и сходящимися последовательностями

Теорема. Для того чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Свойства сходящихся последовательностей.

Рис. 2

1. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет только один предел (рис. 2).
2. Сходящаяся последовательность ограничена (рис. 1).
3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$, где $k \in \mathbf{N}$ – фиксированное число.
4. Если $x_n = a$, $n \in \mathbf{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
5. Арифметические свойства.

Непосредственное вычисление пределов

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-5}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{5}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}=\dfrac{2+0}{3-0}=\dfrac{2}{3}.$

Пример 6. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$. Применяя теоремы о пределах, найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n+2b_n}$.

Решение. Так как пределы $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$ существуют и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+2b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2b_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{2-3}{2+6}=-\frac{1}{8}.$$

Предел монотонной ограниченной последовательности

Теорема (*Вейерштрасса*). Неубывающая (невозрастающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу), имеет предел.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ раз}}$.

Решение. Эта последовательность может быть задана рекуррентно: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ $(n \geq 1)$. Индукцией по n доказывается, что $x_{n+1} > x_n$ при всех $n \in \mathbf{N}$, и ограниченность, т.е. то, что $x_n < 2$ при всех $n \in \mathbf{N}$.

Так как последовательность возрастает и ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса она имеет предел. Обозначим этот предел буквой a. Так как $x_{k+1}^2 = 2 + x_k$, то по теоремам о пределе суммы и пределе произведения получаем $a^2 = 2 + a$. Корни этого уравнения $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Предел этой последовательности не может быть равен -1. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Число e

Доказывается, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастающая и ограниченная сверху ($x_n \leq 3$ при всех n). Тогда по теореме Вейерштрасса $\{x_n\}$ имеет предел. Этот предел называется числом e: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Предел функции в точке

Множество $\dot{\mathrm{U}}_{\varepsilon}(a)=(a-\varepsilon,\, a)\cup(a,\, a+\varepsilon)$ называется *проколотой* ε-*окрестностью* точки a.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* x, *стремящемся к* a, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x\neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ (рис. 3).

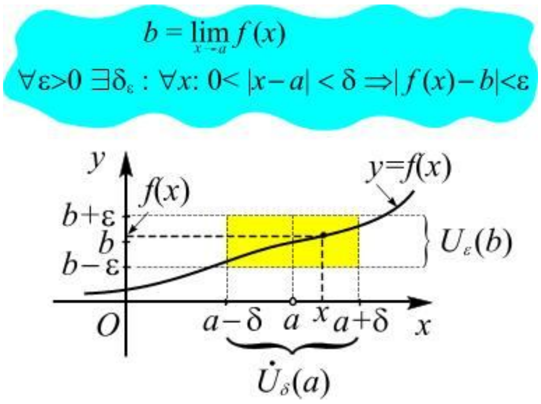
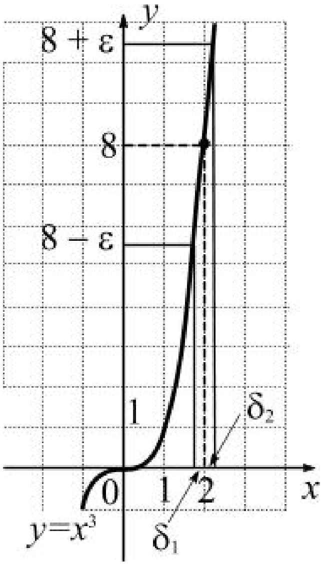


Рис. 3

Из определения видно, что δ зависит от ε. Поэтому при доказательстве равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ обычно указывают формулу $\delta(\varepsilon)$. Желательно на нескольких простых примерах составить таблицу зависимости $\delta(\varepsilon)$ от ε.

Доказательство того, что предел равен данному числу

Доказательство состоит в нахождении зависимости $\delta(\varepsilon)$.



Пример 8. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.

Доказательство. (1-й способ, стандартный). Из неравенства $|x^3 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow 8 - \varepsilon < x^3 < \varepsilon + 8$ получаем $\sqrt[3]{8-\varepsilon} < x < \sqrt[3]{\varepsilon + 8}$.

Если взять $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, где $\delta_1 = 2 - \sqrt[3]{8-\varepsilon}$, $\delta_2 = \sqrt[3]{\varepsilon+8} - 2$, то неравенство $|x^3 - 8| < \varepsilon$ будет выполняться

$$\forall x:\ 0 < |x-2| < \delta(\varepsilon).$$

(2-й способ). Можно считать, что $\delta < 1$. Тогда $1 < x < 3$. Имеем

$$|x^3 - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| < \varepsilon.$$

Так как $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 < 19$ при $1 < x < 3$, то $|x-2| \cdot 19 < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x-2| < \varepsilon / 19$.

Следовательно, $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon/19\}$ удовлетворяет требуемому условию.

Бесконечно малые функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

С их помощью достаточно просто доказываются теоремы о пределах (например, арифметические свойства пределов) и вычисляются пределы.

Теоремы о пределах

1. Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует, то он единствен.

2. Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет предел, то существует проколотая окрестность $\dot{\mathrm{U}}_\eta(a)$ точки a, на которой функция ограничена (т. е. $\forall x \in \dot{\mathrm{U}}_\eta(a)\ |f(x)| \le M$).

3. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $b > 0$ (соответственно $b < 0$), то существует проколотая окрестность $\dot{\mathrm{U}}_\eta(a)$ точки a, в которой $f(x) > 0$ (соотв. $f(x) < 0$).

4. Если функция $f(x)$ тождественно равна постоянной C, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$.

5. Арифметические свойства пределов (для функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих пределы при $x \to a$).

6. Правило двух милиционеров (случай $f(x) \le h(x) \le g(x)$).

Пример. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12.$

Бесконечные пределы

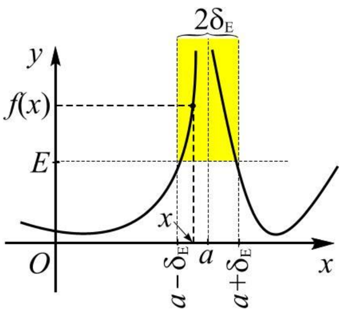


Рис. 4

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (рис. 4). Говорят, что:

а) функция $f(x)$ при $x \to a$ стремится к $+\infty$ и при этом пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если для любого числа E существует такое число $\delta > 0$, что для каждого x, удовлетворяющего условию $0 < |x-a| < \delta$, выполнено неравенство $f(x) > E$, т. е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E \ \exists \delta_E > 0 \ \ \forall x$$

$$0 < |x-a| < \delta_E \ \Rightarrow \ f(x) > E.$$

Аналогично можно записать случаи: б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Полезно дать возможность учащимся для разных случаев записи предела самим дать графическую интерпретацию и, наоборот, для разных рисунков получить символическую запись.

Односторонние пределы

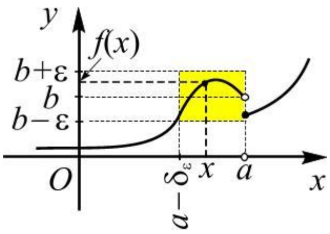


Рис. 5

Предел слева. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве $(a-\eta, a)$, где $\eta > 0$ (можно назвать это множество *левой окрестностью* точки a). Говорят, что число b является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a *слева* (рис. 5), и пишут $b = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \in (a-\delta, a)$ выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. На ε-языке это записывается так:

$$b = \lim_{x \to a-0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \ a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Аналогичным образом определяется *предел справа*.

Полезно дать возможность учащимся для разных случаев записи предела самим дать графическую интерпретацию и, наоборот, для разных рисунков получить символическую запись.

Примечание. Для любой функции $f(x)$ справедливо утверждение: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует в том и только том случае, если существуют предел слева $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и эти пределы равны.

Пределы на бесконечности

Пусть некоторый промежуток $[a;+\infty)$ входит в область определения функции $f(x)$. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$ (рис. 6), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число D_ε, что для каждого $x > D$ будет выполнено неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$; при этом пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$. Символическая запись:

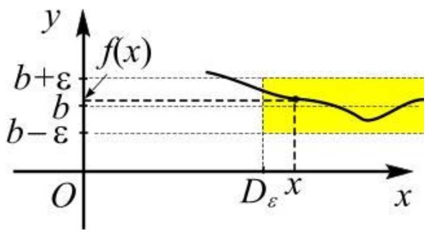


Рис. 6

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists D_\varepsilon\ \forall x\ x > D_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Для доказательства равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ указывают формулу $D(\varepsilon)$.

Аналогично определяются *пределы функции* $f(x)$ *при* $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

Полезно дать возможность учащимся для разных случаев записи предела самим дать графическую интерпретацию и, наоборот, для разных рисунков получить символическую запись.

Пример $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-1-x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x-1}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = 2.$$

Нахождение асимптот графиков функций с использованием пределов

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точек графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении их от начала координат.

Вертикальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если функция имеет бесконечный предел слева или справа от точки $x = a$.

Горизонтальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ или при $x \to +\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b_1$. Уравнение асимптоты имеет вид $y = b$ при $x \to -\infty$ или $y = b_1$ при $x \to +\infty$.

Наклонные асимптоты. Если график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, то справедливо равенство $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx - b] = 0$, т. е. $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx]$.

Учащиеся должны понимать, что график функции может иметь не более двух наклонных асимптот (включая и горизонтальные). Одну при $x \to -\infty$ и одну при $x \to +\infty$ (или они совпадают).

Непрерывность функций

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$f(x) \to f(a) \text{ при } x \to a. \qquad (2)$$

Функция $f(x)$ *непрерывна слева* (в точке a), если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$. Функция $f(x)$ *непрерывна справа* (в точке a), если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Говорить о непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно лишь в случае, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, т.е. на множестве вида $(a-\delta, a+\delta)$. В противном случае понятие непрерывности теряет смысл. Говорить о непрерывности слева (соответственно справа) можно, если $f(x)$ определена в какой-нибудь *левой окрестности* $(a-\delta; a]$ (соответственно *правой окрестности* $[a; a+\delta)$ точки a).

Разрывные функции. Не всякая функция, определенная в окрестности точки a, является в ней непрерывной. Например, разрывны функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 2, \\ 3 & \text{при } x = 2 \end{cases}$ в точке $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 3$;

2) функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{при } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ в каждой точке области определения.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на множестве*** X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 9. Найдите все значения параметра a, такие, что функция $f(x)$ является непрерывной на всей числовой прямой, если

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, \text{ если } x>2, \\ x+a^2-2, \text{ если } x\le 2. \end{cases}$$

Решение. При $x>2$ функция $f(x)=ax^2$ – непрерывна при всех x и $\lim\limits_{x\to 2_{+0}} f(x)=4a$.

При $x\le 2$ функция $f(x)=x+a^2-2$ – непрерывна при всех x и $\lim\limits_{x\to 2_{-0}} f(x)=a^2$.

Функция $f(x)$ будет непрерывна на всей числовой прямой, если $\lim\limits_{x\to 2_{+0}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2_{-0}} f(x)$ или $a^2=4a$, т. е. при $a=0$ или $a=4$.

Ответ. $a=0$. $a=4$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (*Вейерштрасса*). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$, достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения, т. е. существуют такие x_1, x_2 из отрезка $[a;b]$, что $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ при всех x из $[a;b]$.

Теорема (*о нулях непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a;b]$ имеется хотя бы один нуль функции f, т. е. $\exists c \in [a;b]: f(c) = 0$. такая, что при всех $x \in [a;b]$.

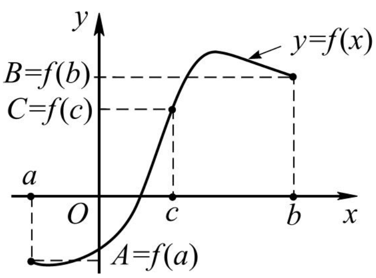


Рис. 7

Теорема (*Коши*) (*о промежуточном значении непрерывной функции*). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ и $A < C < B$ (либо $B < C < A$), то существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = C$ (рис. 7).

Производная функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется *производной функции* f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Производной функции $y = f(x)$ называется также функция $f'(x)$, значение которой в точке x равно производной $f(x)$ в этой точке.

Дифференцируемость – более сильное условие на функцию, чем непрерывность.

Числа $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ и $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называются соответственно *левой* и *правой производными функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. Для существования производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и совпадали, т. е. $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Примеры вычисления производных по определению

Пример 10. Вычислить производную функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке $x_0=4$.

Решение. $f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\sqrt{4+\Delta x}-2)(\sqrt{4+\Delta x}+2)}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 11. Найти производную функции $y=\sin x$ в произвольной точке (т. е. производную как функцию от x).

Решение. $(\sin x)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\sin(h/2)\cos\left(x+h/2\right)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)\cos\left(x+h/2\right)}{h/2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+h/2\right)=\cos x.$$

Непосредственно вычисляя производные элементарных функций, получаем таблицу производных, перед этим уже получены первый и второй замечательный пределы и следствия из них.

Задача интересна с методической точки зрения тем, что на одном графике представлены графики функции и ее производной.

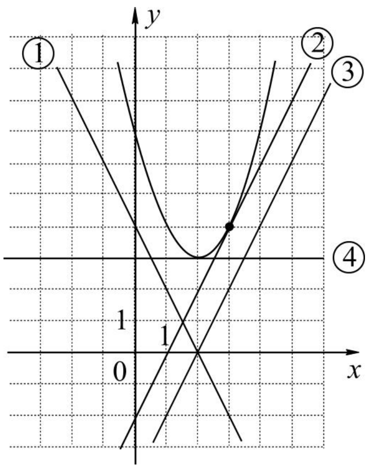


Рис. 8

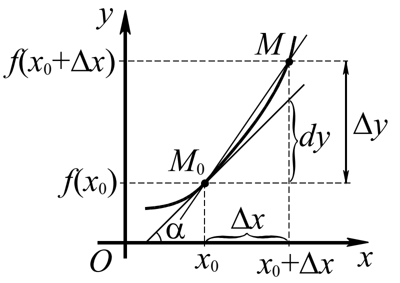
ЕГЭ прошлых лет. На рис. 8 изображены графики функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и четыре прямые. Одна из прямых – график производной данной функции. Указать номер этой прямой.

Решение. Производная функции $f(x)$ равна $f'(x) = 2ax + b$. Так как $f'(x_в) = 0$, где $x_в$ – абсцисса вершины параболы, то только прямые №1 и №3 удовлетворяют этому условию. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Следовательно, только прямая №3 удовлетворяет требуемым условиям.

Ответ. №3.

Дифференциал функции

Из определения производной функции следует $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = o(\Delta x)$, где $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot o(\Delta x)$. Первое слагаемое в формуле при $f'(x_0) \neq 0$ называют *главной линейной частью приращения* функции в точке x_0.



$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\Delta x = dx$

$dy = f'(x_0)dx$

Рис. 8

Определение. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то произведение $f'(x_0)\Delta x$ называют *дифференциалом функция* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $df(x_0)$ (или df).

Пример 12. Найти приращение Δf и дифференциал df функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + \Delta x^2 = 0{,}61;$

$$df = f'(3)dx = (x^2)'\big|_{x=3} \cdot dx = 6dx = 6\Delta x = 0{,}6.$$

Касательная к графику функции и геометрический смысл производной

Касательная к графику функции $y=f(x)$ *в точке* $(x_0, f(x_0))$ – это прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $k=f'(x_0)$. Уравнение этой прямой называется *общим уравнением касательной* и имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Геометрический смысл производной. Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке с абсциссой x_0, $\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$.

Задачи на геометрический смысл производной и касательную встречаются во многих вариантах ЕГЭ.

ЕГЭ 2010. (Прототип задания B8 (№ 27485). Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Функции $y = x^2 + 6x - 8$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой, ее производная равна $y'(x) = 2x + 6$. Так как касательная к графику функции параллельна прямой $y = 7x - 5$, то найдем абсциссу x_0 точки касания, в которой $y'(x_0) = 7$ или $2x_0 + 6 = 7$. Отсюда получаем $x_0 = 0,5$. **Ответ.** 0,5.

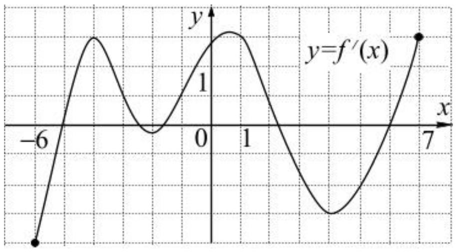


Рис. 9

ЕГЭ 2007. B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рис. 9 изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

Ответ. Таких точек 3.

ЕГЭ 2006. B5. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.

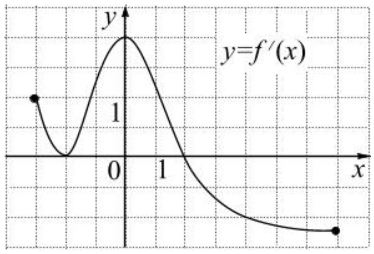


Рис. к задаче №27485

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$ равен тангенсу ее угла наклона $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(4)$. По графику находим $f'(4) = -2$. Следовательно, ее угловой коэффициент равен -2. **Ответ.** -2.

ЕГЭ 2010. (Задание B8 (№ 9051)). На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

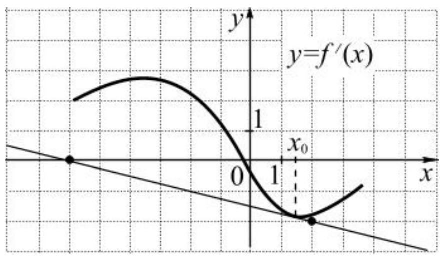


Рис. к задаче №9051

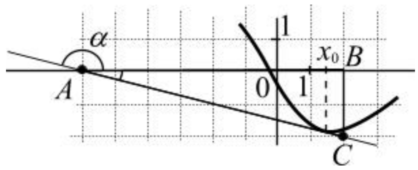


Рис. к задаче №9051*a*

Решение. Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке с абсциссой x_0, $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 9051*a*). В соответствии с рисунком получаем, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,\angle CAB = -\frac{BC}{AB} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$

Значит $f'(x_0) = -0,25$. **Ответ.** $-0,25$.

Условие касания кривых, заданных уравнениями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, выглядит следующим образом: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$

Пример 13. Составить уравнение общей касательной к кривым $y = x^2$ и $y = x^2 + x$.

Решение. Пусть $y = ax + b$ – общая касательная, а $M_1 = (x_1; y_1)$ и $M_2 = (x_2; y_2)$ – точки касания. Тогда получаем:

$$\begin{cases} ax_1 + b = x_1^2, \\ a = 2x_1, \\ ax_2 + b = x_2^2 + x_2, \\ a = 2x_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = x_1^2, \\ x_1 = x_2 + 0{,}5, \\ a = 2x_2 + 1, \\ a(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + b = x_1^2, \\ x_1 - x_2 = 0{,}5, \\ a = 2x_2 + 1, \\ a(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - x_2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы получаем $(2x_2 + 1)(\underbrace{x_1 - x_2}_{0{,}5}) = (\underbrace{x_1 - x_2}_{0{,}5})(2x_2 + 0{,}5) - x_2$ или $x_2 + 0{,}5 = x_2 + 0{,}25 - x_2$, или $x_2 = -0{,}25$. Отсюда $x_1 = \dfrac{1}{4}$, $a = \dfrac{1}{2}$, $b = x_1^2 - ax_1 = x_1(x_1 - a) = -\dfrac{1}{16}$.

Ответ. Уравнение общей касательной имеет вид $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{16}$.

ЕГЭ 2010. B8 (№6043). Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Функция $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой, ее производная равна $f'(x) = 3x^2 + 14x + 7$. Используя условие касания кривых заданных уравнениями $y = f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$ и $y = g(x) = -4x - 11$, получаем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11, \\ 3x^2 + 14x + 7 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -\dfrac{11}{3}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Подставляя полученные значения в первое уравнение, получаем: если $x = -1$, то $x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -1 + 7 - 7 - 6 = -7$ и $-4x - 11 = -7$, т.е. равенство верно если $x = -\frac{11}{3}$, то $x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = \frac{355}{27}$, а $4x - 11 - \frac{77}{3}$, т.е. равенство не выполняется.

Следовательно, прямая $y = -4x - 11$ касается графика данной функции в точке с абсциссой $x = -1$. **Ответ.** -1.

Физический смысл производной и дифференциала

Механический смысл первой и второй производных. Скорость тела в момент времени t равна $x'(t)$, а ускорение равно $x''(t)$, где $x(t)$ – путь, пройденный телом к моменту времени t.

Средняя скорость за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$.

Физический смысл производной. Производная характеризует скорость изменения одной физической величины по отношению к другой, считающейся независимой переменной.

Физический смысл дифференциала. Пусть $S(t)$ – координата движущейся материальной точки в момент времени t от начала движения. Тогда $dS = v \cdot \Delta t$. Поэтому дифференциал функции $S(t)$ равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени от t до $t + \Delta t$, если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент времени t.

Пример 14. Тело, выпущенное с поверхности земли вертикально вверх, движется по закону $h(t)=60t-5t^3$ (высота h измеряется в метрах, t в секундах). Через сколько времени оно достигнет верхней точки своего подъема? Определите высоту верхней точки подъема тела.

Решение. Скорость движения тела $\upsilon(t)$ выражается формулой $\upsilon(t)=h'(t)=60-15t^2$. В верхней точке подъема его скорость равна нулю. Из уравнения $60-15t^2=0$ получаем $t=2$ *сек*. Тогда высота верхней точки подъема тела равна $h(2)=60\cdot 2-5\cdot 2^3=80$ *м*. **Ответ.** 2 *сек*, .80 *м*.

ЕГЭ прошлых лет. При каком значении аргумента равны скорости изменения функций $f(x)=\sqrt{3x-10}$ и $g(x)=\sqrt{14+6x}$?

Решение. $D(f)=\left[\frac{10}{3};\infty\right)$, $D(f')=\left(\frac{10}{3};\infty\right)$ и $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-10}}$; $D(g)=\left[-\frac{7}{3};\infty\right)$, $D(g')=\left(-\frac{7}{3};\infty\right)$ и $g'(x)=\frac{3}{\sqrt{14+6x}}$. Используя физический смысл производной, получаем, что искомое значении аргумента определяется из условия $g'(x)=f'(x)$ или $\frac{3}{\sqrt{14+6x}}=\frac{3}{2\sqrt{3x-10}}$. Решая последнее уравнение, получаем $x=9$. **Ответ.** 9.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема (*Ферма*). Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

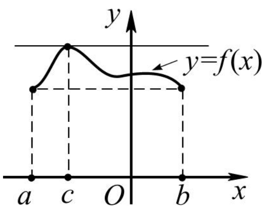


Рис. 10*а*

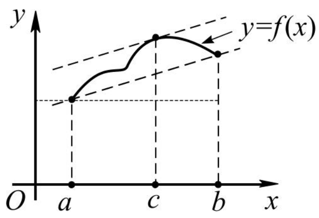


Рис. 10*б*

Теорема (*Ролля*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, принимает в концах этого отрезка равные значения, т. е. $f(a) = f(b)$, и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (рис. 10а).

Теорема (*Лагранжа*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема интервале $(a; b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$ (рис. 10б) такая, что

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (*формула конечных приращений Лагранжа*).

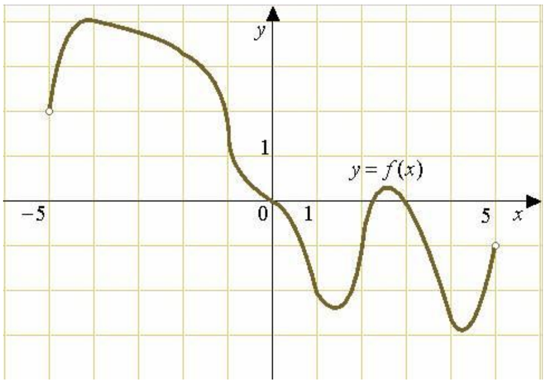


Рис. к задаче №27489

ЕГЭ 2010. Прототип задания В8 (№ 27489). На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.

Решение. Для получения ответа требуется найти количество точек, в которых $f'(x) = 0$. Функция, представленная на рисунке, имеет экстремум в четырех точках. В соответствии с теоремой Ферма имеется четыре точки, в которых производная функции равна 0.

Ответ. 4 точки.

Исследование функции на монотонность

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на $(a; b)$ (рис. 11*а*).

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция $f(x)$ убывает на $(a; b)$ (рис. 11*б*).

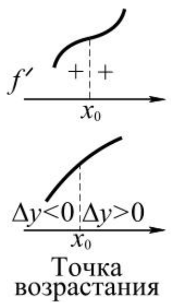


Рис. 11*а*

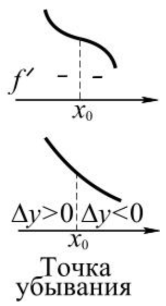


Рис. 11*б*

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на данном интервале (или на открытом луче, или на всей числовой прямой), достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной (отрицательной) в каждой точке этого интервала (открытого луча, прямой). Если при этом функция $f(x)$ непрерывна на одном или обоих концах промежутка возрастания (убывания) (достаточно даже соответствующей односторонней непрерывности), то этот конец можно присоединить к указанному промежутку (т. е. утверждать монотонность на $(a; b]$, $[a; b)$ или $[a; b]$).

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками*.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками* функции $f(x)$.

Экстремумы функции

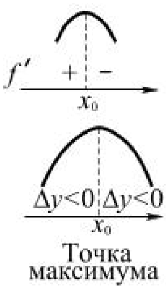


Рис. 12*а*

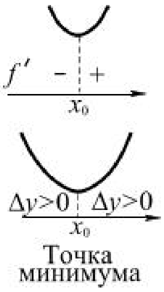


Рис. 12*б*

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума функции* $f(x)$, если существует такая ее окрестность $\mathrm{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in \mathrm{U}$ (рис. 12*а*).

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального минимума функции* $f(x)$, если существует такая ее окрестность $\mathrm{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что $f(x_0) \leq f(x)$ при всех $x \in \mathrm{U}$ (рис. 12*б*).

Точки локального максимума и минимума функции $f(x)$ называются ***точками локального экстремума. Экстремумом функции*** $f(x)$ называется ее значение в точках локального минимума или максимума.

Необходимое условие экстремума (теорема *Ферма*). Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточные условия экстремума в точке. 1. *Признак максимума функции*. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

2. *Признак минимума функции*. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Алгоритм нахождения интервалов монотонности и экстремумов

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.

2. Найти производную $f'(x)$.

3. Найти критические точки, т. е. значения x, при которых производная $f'(x)$ не существует, и значения x, при которых $f'(x)=0$.

4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции, используя достаточные условия монотонности.

5. Для каждой критической точки определить, как меняется знак производной при переходе через эту точку и в соответствии с признаками максимума и минимума функции выяснить характер точки.

6. Записать результат исследования: промежутки монотонности и экстремумы.

ЕГЭ прошлых лет. При каком наибольшем значении a функция $f(x)=\frac{2}{3}x^3-ax^2+7ax+5$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение. Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, $f'(x)=2x^2-2ax+7a$. Функция возрастает на всей числовой прямой, если $f'(x)\geq 0$ для всех $x\in(-\infty;+\infty)$, причем $f'(x)=0$ в конечном числе точек. Неравенство $2x^2-2ax+7a\geq 0$ при всех $x\in(-\infty;+\infty)$ справедливо при условии, что его дискриминант $D=4a^2-56a\leq 0$, т. е. при $4a(a-14)\leq 0 \Leftrightarrow a\in[0;14]$. Наибольшее значение равно 14. **Ответ.** 14.

(*Задача требует уточнения формулировки*!) **ЕГЭ 2010. Прототип задания В8 (№ 27488).** На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$. Определите количество <u>целых</u> точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.

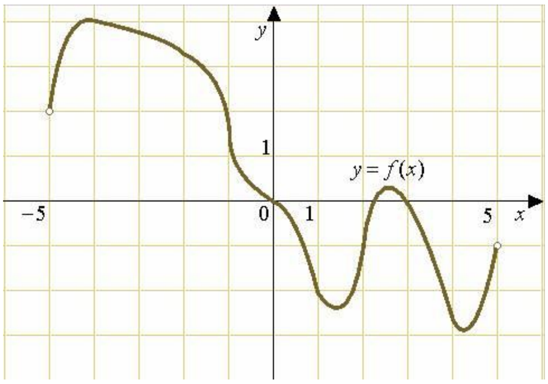


Рис. к задаче №27488

Решение. У данной функции имеет два участка убывания. Выбирая на этих участках точки, абсциссы которых – целые числа, получаем всего 8 точек $x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,3,4\}$.

Ответ. 8 точек.

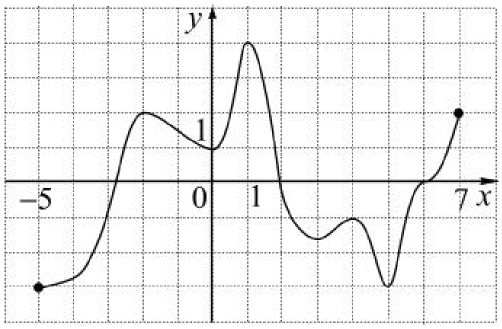


Рис. 13*а*

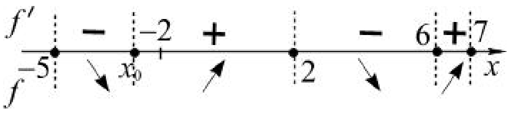


Рис. 13*б*

ЕГЭ 2006. В6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5, 7)$. График ее производной изображен на рисунке 13*а*. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.

Решение. Данная функция имеет два промежутка убывания (см. схему на рис. 13*б*): $[-5; x_0]$, где $-3 < x_0 < -2$, и $[2; 6]$.

Длина отрезка $[2; 6]$ больше длины отрезка $[-5; x_0]$ и равна 4.

Ответ. 4.

ЕГЭ 2010. Прототип задания B11 (№ 3783). Найдите точку минимума функции $y = (x+7)e^{x-7}$.

Решение. Функция $y = (x+7)e^{x-7}$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой и $y' = e^{x-7} + (x+7)e^{x-7} = (x+8)e^{x-7}$.

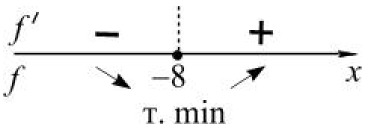


Рис. к задаче №3783

Из уравнения $y' = 0$ или $(x+8)e^{x-7} = 0$ получаем, что функция $y = (x+7)e^{x-7}$ имеет единственную критическую точку $x = -8$, разбивающую числовую прямую на два промежутка. Определяя на этих промежутках знаки производной (рис. 3783), получаем $y' < 0$ при $x < -8$ и $y' > 0$ при $x > -8$. Следовательно, $x = -8$ – точка минимума данной функции. **Ответ.** $x = -8$.

ЕГЭ 2010. Задание B8 (№ 7801). На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7;14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6;9]$.

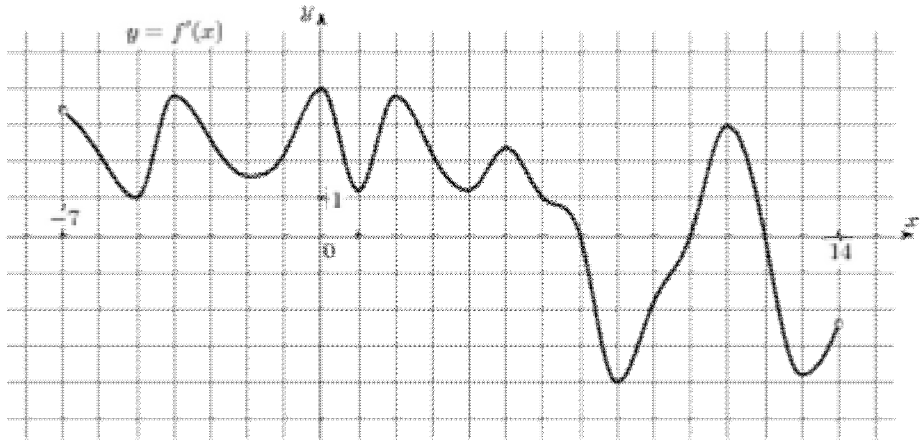


Рис. к задаче №7801*а*

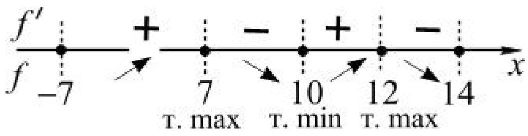


Рис. к задаче №7801*б*

Решение. Используя данный рис. 7801а расставляем знаки производной (рис. 7801б) на интервале $(-7;14)$. Получаем, что на отрезке $[-6;9]$ находится только одна точка максимума функции $f(x)$.

Ответ. 1.

ЕГЭ 2010. Аналог прототипа задания B8 (№ 27490). На рисунке 7801*а* изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите сумму точек экстремумов функции $f(x)$. (*Условие изменено, чтобы использовать рисунок из предыдущей задачи*).

Решение. Используя рис. 7801*б*, получаем, что функция имеет на интервале $(-7; 14)$ три точки экстремума, абсциссы которых равны $x_1 = 7$, $x_2 = 10$ и $x_3 = 17$. Следовательно, сумма абсцисс точек экстремумов равна $x_1 + x_2 + x_3 = 7 + 10 + 12 = 29$. **Ответ.** 29.

ЕГЭ прошлых лет. Найдите максимум функции $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x - 4\frac{1}{2}$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, ее производная равна $y' = -x^2 + x + 6$. Из уравнения $y' = 0$ или $-x^2 + x + 6 = 0$ получаем, что данная в условии функция имеет две критические точки $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, разбивающие числовую прямую на три промежутка. Определяя на этих промежутках знаки производной (рис. 14), получаем, что данная функция имеет одну точку максимума $x_{max} = 3$. Тогда максимум функции равен

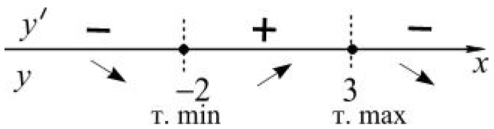


Рис. 14

$$y(3) = -\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 - 4\frac{1}{2} = -9 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{9}{2} = 9.$$ **Ответ.** 9.

ЕГЭ прошлых лет. Решите уравнение

$$x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)+(2x+1)\left(1+\sqrt{1+(2x+1)^2}\right)=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ и функция нечетна $f(-x)=-x\left(1+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=-x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$.

Уравнение можно записать в виде

$$f(x)+f(2x+1)=0 \Leftrightarrow f(x)=-f(2x+1) \Leftrightarrow f(x)=f(-2x-1).$$

Отметим, что $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Действительно

$$f'(x)=\left(x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'=1+\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

Тогда $f(x)=f(-2x-1) \Leftrightarrow x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$. **Ответ.** $x=-\dfrac{1}{3}$.

ЕГЭ 2009. С5. Решите уравнение $x^8+98\cos(4x+3)=98\cos x^2+(4x+3)^4$.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$x^8-98\cos x^2=(4x+3)^4-98\cos(4x+3).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^4-98\cos t$. $D(f)=(-\infty;+\infty)$ и функция четна. Отметим, что $f(x)$ возрастает на $[0;+\infty)$, так как

$$f'(t)=4t^3+98\sin t=\begin{cases}4t^3+98\sin t\ge 0,\ t\in[0;\,\pi],\\ 4t^3+98\sin t>4\cdot 3^3-98>0,\ t>\pi.\end{cases}$$

Исходное уравнение можно записать в виде $f(x^8)=f((4x+3)^4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^8=(4x+3)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=4x+3,\\ x^2=-4x-3.\end{array}\right.$ **Ответ.** $x=2\pm\sqrt{7}$, $x=-1$, $x=-3$.

Наибольшее и наименьшее значение функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то согласно теореме Вейерштрасса существует точки $x_1 \in [a;b]$ и $x_2 \in [a;b]$ такие, что

$$f(x_1) = M, \text{ где } M = \max_{x \in [a;b]} f(x), \qquad f(x_2) = m, \text{ где } m = \min_{x \in [a;b]} f(x),$$

где $M-$ наибольшее, а $m-$ наименьшее значения функция $f(x)$ на $[a;b]$. Их еще обозначают $M = y_{\text{наиб}}$ и $m = y_{\text{наим}}$.

Теорема. Область значений функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, представляет собой отрезок $[y_{\text{наим}}; y_{\text{наиб}}]$.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и пусть на этом интервале функция имеет только одну точку экстремума – точку x_0. Если точка x_0 – точка максимума, то $f(x_0)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$; если точка x_0 – точка минимума, то $f(x_0)$ – наименьшее значение функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти значения x, при которых производная $f'(x)$ не существует, и значения x, при которых $f'(x) = 0$; отобрать из полученных значений те, которые лежат внутри отрезка $[a; b]$. Пусть это будут $x_1, x_2, ..., x_n$.

3. Вычислить значения $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.

4. Среди полученных значений выбрать наибольшее (это будет $M = y_{\text{наиб}}$ при некотором значении переменной $x_0 \in \{a, x_1, x_2, ..., x_n, b\}$) и наименьшее (это будет $m = y_{\text{наим}}$ при $x_0 \in \{a, x_1, x_2, ..., x_n, b\}$).

ЕГЭ 2010. Прототип задания B11 (№ 3383). Найдите наименьшее значение функции $y = (x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6; 8]$.

Решение. Функция $y = (x-8)e^{x-7}$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой, $y' = e^{x-7} + (x-8)e^{x-7} = (x-7)e^{x-7}$.

Из уравнения $y' = 0$ или $(x-7)e^{x-7} = 0$ получаем, что данная функция имеет единственную критическую точку $x = 7 \in [6; 8]$. Наименьшим из чисел $f(6) = (6-8)e^{6-7} = -\frac{2}{e}$, $f(7) = (7-8)e^{7-7} = -1$ и $f(8) = (8-8)e^{8-7} = 0$ является $f(7) = -1$. Следовательно, наименьшее значение функции равно $y_{\text{наим}} = f(7) = -1$. **Ответ.** -1.

Задача с геометрическим содержанием

Пример 15. Найти наибольший объем конуса, образующая которого имеет данную длину l.

Решение. Объем конуса выражается через радиус основания R и высоту H формулой $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Радиус основания, образующая и высота конуса связаны соотношением $R^2=l^2-H^2$. Тогда $V(H)=\frac{1}{3}\pi(l^2-H^2)H$.

Функция $V(H)$ определена (по смыслу задачи) при $H\in[0;\ l]$. $V'(H)=\frac{1}{3}\pi l^2-\pi H^2$. Критические точки функции определяются из уравнения $V'(H)=0$ или $\frac{1}{3}\pi l^2-\pi H^2=0$. Корень уравнения, принадлежащий отрезку $[0;\ l]$, есть $H=\frac{l}{\sqrt{3}}$. Сравнивая значения $V(0)=V(l)=0$, $V\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$, получаем, что $V_{\text{наиб}}=\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. **Ответ.** $\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$.

Выпуклость и вогнутость

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*выпуклым вверх*, или *вогнутым*) на интервале $(a; b)$, если в любой точке интервала $(a; b)$ он расположен выше (ниже) касательной, проведенной к нему.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ либо $f''(x)$ не существует.

Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба*.

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 – точка перегиба.

План исследования функции $f(x)$ с помощью производной

Следует найти:

1) область определения функции $f(x)$ и поведение ее на границе области определения. Например, если $D_f = (-\infty; 2) \cup (2; 5)$, то вычисляют пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 5-0} f(x)$;

2) свойства функции $f(x)$ (четность, нечетность и периодичность);

3) точки пересечения с осью Oy $(0, f(0))$ и с осью Ox (из уравнения $f(x) = 0$), и интервалы знакопостоянства ($f(x) > 0$, $f(x) < 0$);

4) асимптоты графика функции: вертикальные асимптоты $x = a$ находят из условия $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (или предел при $x \to a + 0$ и $x \to a - 0$); наклонные асимптоты $y = kx + b$ находят с помощью формул $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (или отдельно при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$), $b = \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - kx \big) = \infty$ (или отдельно при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$);

5) экстремумы функции и интервалы монотонности. Применяя необходимое условие экстремума ($f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует), находят критические точки. Применяя достаточное условие экстремума, выясняют, есть ли в данной точке экстремум, а если есть, то какой именно: максимум или минимум;

6) точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости. Выпуклость вверх определяется из условия $f''(x) < 0$, выпуклость вниз – из условия $f''(x) > 0$, точка перегиба – из условия $f''(x) = 0$ или не существует (однако это лишь необходимое условие перегиба).

Пример 16. Построить график функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Решение. 1. Область определения $D_f=(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-2}=+\infty,\quad \lim_{x\to2-0}\frac{x^2}{x-2}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{x^2}{x-2}=+\infty.$$

2. Функция не обладает свойствами четности, нечетности, периодичности.
3. $f(x)>0$ при $x>2$, $f(x)<0$ при $x<2$, $f(x)=0$ при $x=0$.
4. Вертикальная асимптота $x=2$. Найдем наклонные асимптоты $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-2}=1$; $b=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^2}{x-2}-x\right)=2$. Значит, $y=x+2$ – наклонная асимптота.
5. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)'=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$. Значит, $f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=4$. Далее, $f''(x)=\left(\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)'=\dfrac{8}{(x-2)^3}$.

Видим, что $f''(x)\neq0$. Кроме того, $f''(0)<0$, $f''(4)>0$, поэтому в точке $x=0$ функция имеет максимум, а в точке $x=4$ минимум. При этом $f(0)=0$, $f(4)=8$.

6. Так как $f''(x)\neq0$ ни при каких x, то график функции не имеет точек перегиба. Наконец, $f''(x)>0$ при $x>2$, поэтому участок $(2;+\infty)$ выпуклости вниз, а при $x<2$ $f''(x)<0$, значит, $(-\infty;\,2)$ – участок выпуклости вверх.

На основании изложенного выше строим график функции (рис. 15).

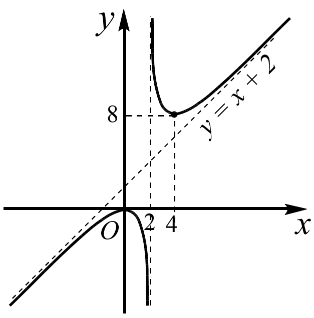


Рис. 15