МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011, ЗАДАЧИ С4

(*лекция для учителей в издательстве «Бином» 10.12.2010*)

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
aaprokof@yandex.ru

Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи[1].)

Задачи С4 ЕГЭ 2010 и 2011 имеют характерную особенность. В отличие от практики единого экзамена прошлых лет и подавляющего большинства задач школьного учебника эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно. В результате не удается построить чертеж по условию задачи в одном варианте. Поэтому подобные задачи называют многовариантными.

Можно выделить следующие причины, ведущие к неоднозначной трактовке условия задачи. Следует отметить, что приведенная классификация не претендует на отражение в полном объеме всего многообразия подобных задач, но включают в себя большую часть, с которой придется столкнуться школьнику при подготовке к экзамену.

1. Условие задачи не определяет взаимное расположение двух фигур:

- точки и прямой (расположение точки на прямой или в одной из полуплоскостей);
- точки и двух параллельных прямых;
- точки и отрезка, лежащих на одной прямой (или трех точек, лежащих на одной прямой);
- точки и окружности (внутри, на или вне окружности);
- точки и многоугольника (внутри, на сторонах или вне многоугольника;
- вписанный угол, опирающийся на хорду (вид угла – острый, прямой или тупой, (см. рис. 1));

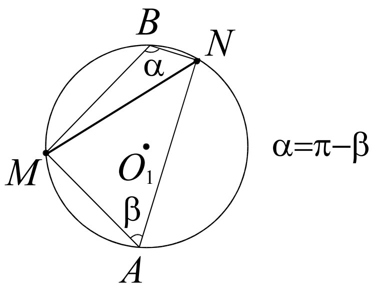


Рис. 1

2. Условие задачи не определяет взаимное расположение точек или элементов фигуры:

- треугольник, вписанный в окружность (расположение центра окружности относительно треугольника);
- трапеция, вписанная в окружность (расположение центра окружности относительно трапеции).

3. Условие задачи не определяет расположения элементов фигуры:

- условие задачи допускает различные решения в зависимости от варианта обозначения вершин многоугольника (см. рис. 2);

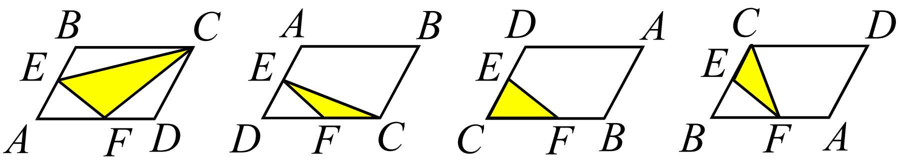


Рис. 2

- имеется произвол в выборе линейного элемента;
- имеется произвол выбор углового элемента;

[1] 1 Корянов А. Математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С1-С5. Методы решения. Многовариантные задачи по планиметрии. (*на сайте* http://www.alexlarin.narod.ru/)
2. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии. Учеб.-метод. пособие. – К. «Магистр», 1996, - 256 стр. (*глава IV «Многовариантные задачи»*).

- имеется произвол в выборе отношения отрезков, площадей фигур.

4. В задаче фигурируют объекты, которым приписываются определенные свойства, но не указан порядок соответствия между множеством объектов и множеством их свойств. Например,

- условие задачи не привязано к конкретной вершине многоугольника;
- в равнобедренном треугольнике, но не указаны равные стороны;
- при разбиении отрезка на заданные части или в данном отношении не указано относительно, какого из концов;
- при заданном отношении пары сторон многоугольника не указано, какой конкретно;
- при разбиении отрезка на заданные части или в данном отношении не указано относительно, какого из концов;
- при пересечении прямых задано значение одной из двух пар вертикальных углов, но не указано какой конкретно;

5. В условии задачи фигурируют две окружности, но:

- не указан тип касания (внешний или внутренний, см. рис. 3);

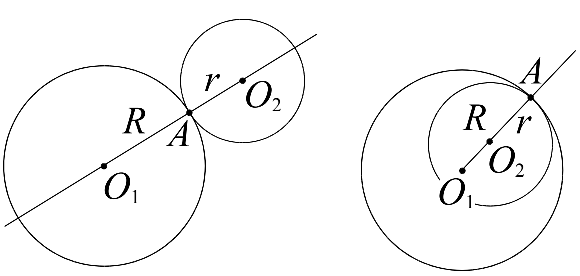


Рис. 3

Полезные факты:

При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.

Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

- непересекающиеся окружности не указан тип касательных (внутренние или внешние, см. рис. 4);

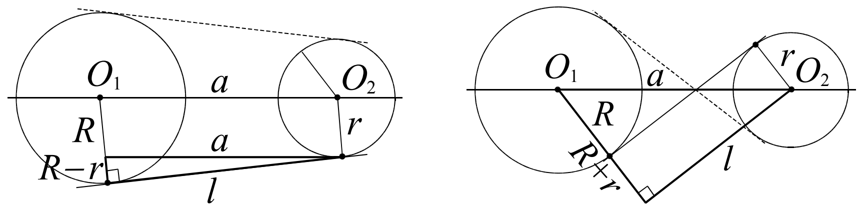


Рис. 4

- пересекающиеся окружности (расположение центров окружностей относительно их общей хорды, см. рис. 5);

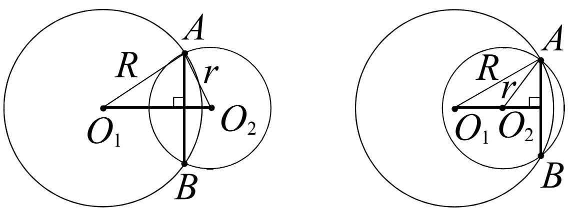


Рис. 5

Полезные факты: *при любом варианте расположения центров окружностей общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам*.

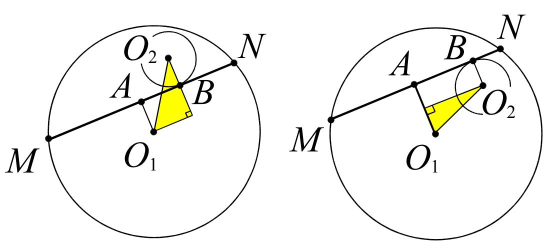


Рис. 6

- в одной из окружностей проведена хорда и другая окружность, расположенная внутри первой касается этой ходы (см. рис. 6);
- две окружности касаются одной прямой, но не указано расположение центров этих окружностей относительно этой прямой.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Площадь треугольника ABC равна 8. MN – средняя линия. Найдите площадь треугольника CMN.

Полезные факты: ● *Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*
● *Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.*

Решение. При решении данной задачи неоднозначность состоит в выборе средней линии.

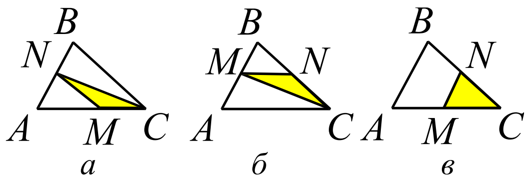


Рис. 7

Рассмотрим три случая (см. рис. 7).
1) Отрезок MN параллелен отрезку BC. Так как CM – медиана треугольника ABC, то

$$S_{AMC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8=4.$$

MN – медиана треугольника AMC, поэтому

$$S_{CMN}=\frac{1}{2}S_{AMC}=\frac{1}{2}\cdot 4=2.$$

2) Отрезок MN параллелен отрезку AC/ В этом случае решение аналогично предыдущему.

3) Отрезок MN параллелен отрезку AB. Треугольники CMN и ABC подобны. Тогда

$$S_{CMN}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot S_{ABC}=\frac{1}{4}\cdot 8=2.$$

***Ответ*:** 2.

Пример 2. (2010) Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 9, а точка E делит одну из диагоналей в отношении 1:3.

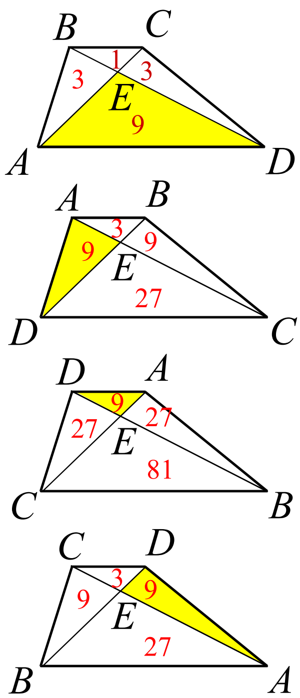


Рис. 8

Полезные факты.
● *Трапеция разбивается диагоналями на два равновеликих треугольника (примыкающих к боковым сторонам) и два подобных треугольника (примыкающих к основаниям).*
● *Если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.*

Решение. При решении данной задачи неоднозначность состоит в выборе варианта обозначения вершин трапеции и выборе большего основания. Пусть точка E делит диагональ в отношении 1:3, считая от вершины верхнего основания.

1) Рассмотрим трапецию с основаниями BC и AD (рис. 8). Треугольники AED и CEB подобны (по двум углам), причем коэффициент подобия равен $k=\frac{AE}{EC}=3.$

Значит, $S_{AED}=3^2\cdot S_{BEC}=9\cdot 1=9$. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, поэтому

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BEC}}=\frac{AE}{EC}=3 \text{ и } S_{ABE}=3\cdot 1=3. \text{ Аналогично } S_{DEC}=3\cdot 1=3.$$

Искомая площадь равна

$$S_{ABCD}=1+3+3+9=16.$$

Остальные случаи выбора оснований трапеции рассмотрите самостоятельно.

***Ответ*:** 16; 48; 144.

Пример 3. (2010) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Решение. В данной задаче неоднозначность состоит в выборе относительно какого основания считается отношения площадей. Обозначим искомый отрезок EF через x (см. рис. 9).

1) Пусть площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 2:3.

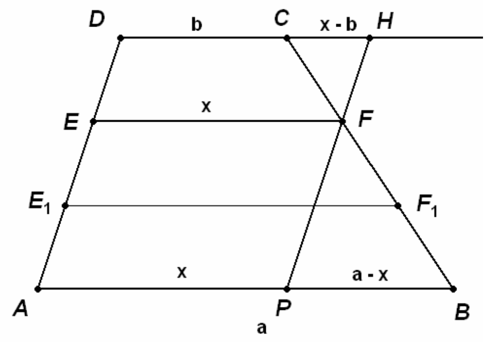


Рис. 9

$$\frac{S_{DCFE}}{S_{ABFE}}=\frac{\frac{b+x}{2}\cdot h_1}{\frac{a+x}{2}\cdot h_2}=\frac{2}{3}.\ \text{Отсюда}\ \frac{h_1}{h_2}=\frac{2(a+x)}{3(b+x)},\quad (*)$$

где h_1 и h_2 – высоты этих трапеций.

Через точку F проведем отрезок PH параллельно AD. Тогда треугольники PBF и HCF подобны и $\frac{CH}{BP}=\frac{h_1}{h_2}$, $\frac{x-b}{a-x}=\frac{h_1}{h_2}$. Используем соотношение $(*)$:

$$\frac{x-b}{a-x}=\frac{2(a+x)}{3(b+x)}.$$

Решая последнее уравнение относительно переменной x, получаем $3\left(x^2-b^2\right)=2\left(a^2-x^2\right)$, $5x^2=2a^2+3b^2$, $x=\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$.

2) Случай, когда площади трапеций $ABFE$ и $DCFE$ относятся как 2:3, решается аналогично. В этом случае площади трапеций $DCFE$ и $ABFE$ относятся как 3:2.

***Ответ*:** $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Пример 4. (2010) Прямая отсекает от сторон прямого угла отрезки 3 и 4. Найдите радиус окружности, касающейся этой прямой и сторон угла.

Можно воспользоваться полезными фактами:

● *Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен*

$$r=\frac{a+b-c}{2}=p-c\quad\left(\angle C=90^\circ\right)$$

● *Радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы прямоугольного треугольника, равен полупериметру этого треугольника.*

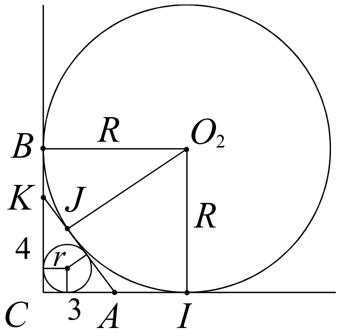


Рис. 10

Решение. 1) Окружность вписана в треугольник. Пусть r – радиус вписанной окружности (см. рис. 10), $CA=3$, $CB=4$. Тогда гипотенуза $AB=5$ и полупериметр $p=\frac{CA+CB+AB}{2}=\frac{3+4+5}{2}=6$. Выражая площадь треугольника CBA двумя способами, получаем

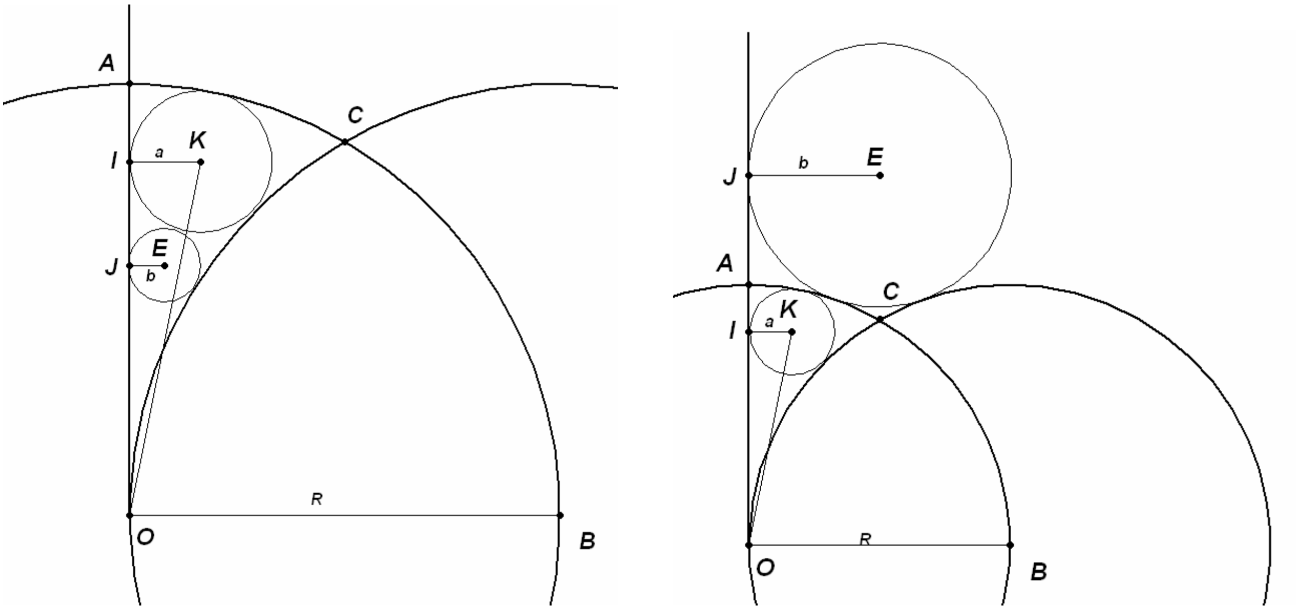
$$S_{CBA}=\frac{1}{2}CB\cdot CA=\frac{1}{2}pr,\ \text{отсюда}\ r=1.$$

2) Пусть R – радиус вневписанной окружности. Так как $BK=BJ$ и $JA=AI$, как касательные к окружности, проведенные из одной точки. Учитывая, что $JA=BA-BJ=5-BK$ и CKO_1I – квадрат, $2R=KC+CI=KB+4+3+AI=KB+4+3+5-KB=12$. Отсюда $R=6$.

***Ответ*:** 1 или 6.

Пример 5. (2010) Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C. Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB, причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB. Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA, а окружность S_2 касается окружности с центром B, прямой OA и окружности S_1. Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

Решение. Так как окружность S_1 радиуса a и окружность с центром в точке B и радиуса R касаются друг друга и общей прямой OA, то имеем $OI = 2\sqrt{Ra}$ (расстояние между точками касания окружностей общей касательной), $OK = R - a$.



а *б*

Рис. 11

Далее используем теорему Пифагора в треугольнике OKI: $(R-a)^2 = a^2 + \left(2\sqrt{Ra}\right)^2$.

Отсюда получаем $R = 6a$.

Рассмотрим первый случай касания окружности S_2 радиуса b (см. рис. 11*а*). Тогда

$$OI = OJ + JI, \text{ или } 2\sqrt{aR} = 2\sqrt{bR} + 2\sqrt{ab},$$

откуда $\sqrt{6a^2} = \sqrt{6ab} + \sqrt{ab}$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7+2\sqrt{6}}{6}$.

Для второго случая (см. рис. 11*б*) имеем $OI = OJ + JI$, $2\sqrt{bR} = 2\sqrt{aR} + 2\sqrt{ab}$. Проводя вычисления аналогично предыдущему случаю, получим $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7-2\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{7\pm 2\sqrt{6}}{6}$.