МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011, ЗАДАЧИ С2

(*лекция для учителей в издательстве «Бином» 10.12.2010*)

Замечания и пожелания направляйте по адресу:
aaprokof@yandex.ru

Различные методы решения задач на определение углов в пространстве[1].

Задачи С2 ЕГЭ 2010 и 2011 посвящены нахождению углов между прямыми в пространстве, прямой и плоскостью, двумя плоскостями; нахождению расстояний от точки прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми.

Угол между прямыми в пространстве

Углом между двумя пересекающимися прямыми l_1 *и* l_2 называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых $0 < \angle(l_1, l_2) \le 90°$.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми l_1 *и* l_2 называется угол между пересекающимися прямыми m_1 *и* m_2, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

Для нахождения угла прямыми в пространстве наиболее часто используют следующие методы:

1) Поэтапно-вычислительный метод.

2) Координатно-векторный метод.

В первом случае строится вспомогательный треугольник, две стороны которого параллельны прямым l_1 *и* l_2, и находится косинус угла φ между этими сторонами по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab}, \qquad (1)$$

где стороны AC и BC треугольника ABC параллельны соответственно l_1 и l_2.

Во втором способе вводится система координат и находится косинус угла φ между прямыми l_1 и l_2 по формуле $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$, которая в координатной форме имеет вид

$$\cos\varphi = \frac{|p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3|}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\cdot\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \qquad (2)$$

где $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ и $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ – векторы, параллельные прямым l_1 *и* l_2 (иначе их называют *направляющие* векторы прямых).

Пример 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми MN и AK, точки M, N, K – середины ребер A_1B_1, DD_1 и CC_1 соответственно (рис. 1).

Решение. 1-*й способ*. Пусть ребро куба равно a. Через точку K проведем прямую, параллельную MN следующим образом. В плоскости основания куба $ABCD$ построим квадрат DCC_2D_2 (рис. 2). Пусть точка P – середина его стороны C_2D_2. Легко доказать, что $KP \parallel MN$. Тогда искомый угол $\varphi = \angle(AK, MN) = \angle(AK, KP)$.

---

[1] 1 Корянов А. Математика. ЕГЭ 2010. Задания типа С1-С5. Методы решения. (*на сайте* http://www.alexlarin.narod.ru/)

2. Смирнов В.А ЕГЭ 2010. Математика. Задача С2 / Под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М: МЦНМО, 2010. – 64 стр.

3. *Бардушкин В.В., Белов А.И., Ланцева И.А., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П.* Применение теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника при решении стереометрических задач. Журнал «Математика для школьников», 2010, №3 стр. 29-34, №4 стр. 13-21.

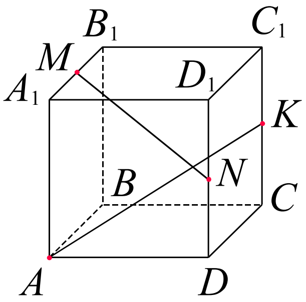


Рис. 1

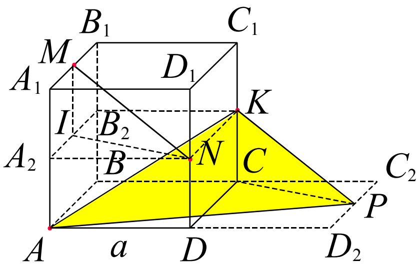


Рис. 2

Рассмотрим треугольник AKP. В соответствии с формулой (1)

$$\cos\varphi = \cos(\angle(AK, KP)) = \frac{|AK^2 + KP^2 - AP^2|}{2AK \cdot KP}.$$

Из прямоугольного треугольника AKC находим

$$AK = \sqrt{AC^2 + KC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника KCP находим

$$AK = \sqrt{KC^2 + CP^2} = \sqrt{KC^2 + (CC_2^2 + C_2P^2)} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника APD_2 находим

$$AP = \sqrt{AD_2^2 + D_2P^2} = \sqrt{(2a)^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{17}a}{2}.$$

Тогда $\cos\varphi = \cos(\angle(AK, KP)) = \dfrac{\left|\dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{6a^2}{4} - \dfrac{17a^2}{4}\right|}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{6}a}{2} \cdot \dfrac{3a}{2}} = \dfrac{\left|-\dfrac{2a^2}{4}\right|}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{6}a}{2} \cdot \dfrac{3a}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ и $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

2-й способ. Пусть ребро куба равно a. Введем декартову систему координат, как указано на рис. 3. В этой системе координат находим координаты точек: $A(0, 0, 0)$, $K\left(a, a, \dfrac{a}{2}\right)$, $M\left(0, \dfrac{a}{2}, a\right)$ и $N\left(a, 0, \dfrac{a}{2}\right)$. Тогда имеем $\overrightarrow{AK} = \left\{a, a, \dfrac{a}{2}\right\}$ и $\overrightarrow{MN} = \left\{a, -\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a}{2}\right\}$. Используя формулу (2), получаем

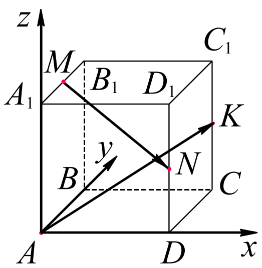


Рис. 3

$$\cos\varphi = \frac{\left|a \cdot a + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)\right|}{\sqrt{a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

Ответ. $\arccos\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$.

Замечание. Преимущество второго способа в общем случае состоит в том, что для вычисления угла между скрещивающимися прямыми достаточно знать координаты двух точек на каждой из этих прямых. При использовании первого метода для школьника построение вспомогательного треугольника является проблемой.

В случае куба или прямоугольного параллелепипеда система координат вводится очевидным образом. В случае правильных пирамид удобно вводить систему координат, как показано на рис. 4.

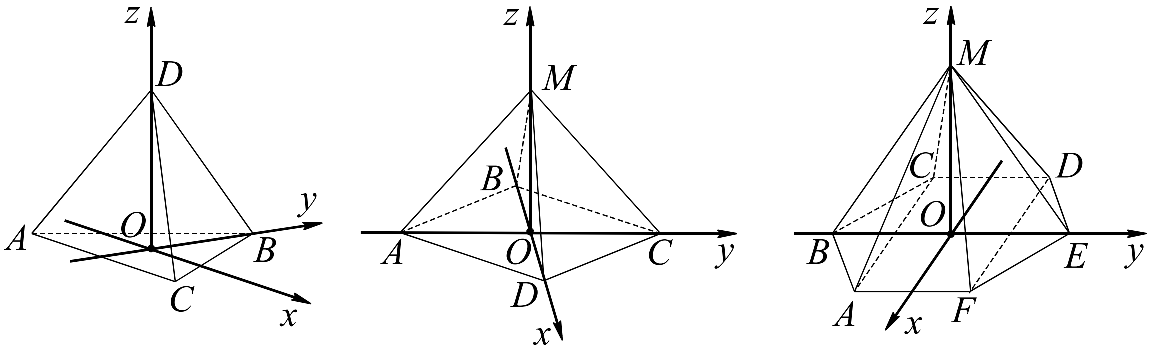


Рис. 4

За начало координат принимается основание высоты пирамиды. В этом случае координаты точек, лежащих на ребрах пирамиды и делящих ребро в заданном отношении вычисляются с использованием следующего правила.

Координаты точки $M(x,\,y,\,z)$*, делящей отрезок* M_1M_2 *между точками* $M_1(x_1,\,y_1,\,z_1)$ *и* $M_2(x_2,\,y_2,\,z_2)$ *в отношении* $M_1M : MM_2 = k$*, определяются формулами*

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k},\quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k} \quad \text{и} \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}. \tag{3}$$

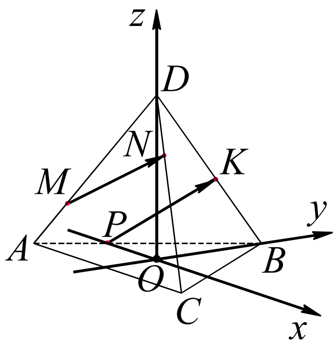


Рис. 5

Пример 2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно 4. Найти угол меду прямыми MN и PK, точки M, N, P, K взяты на ребрах AD, DC, AB и DB соответственно так, что $AM : MD = 1:3$, $CN : ND = 3:1$, $AP : PB = 1:2$ и $BK = KD$.

Решение. Введем декартову систему координат, как указано на рис. 5. Точка O – основание высоты пирамиды, $Ox \parallel AC$.

Так как вершина D проектируется в центр описанной окружности около треугольника ABC, то OB равно радиусу этой окружности $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Высота пирамиды находится из прямоугольного треугольника BOD и равна $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Запишем координаты вершин пирамиды $A\left(-2,-\frac{2}{\sqrt{3}},0\right)$, $C\left(2,-\frac{2}{\sqrt{3}},0\right)$, $B\left(0,\frac{4}{\sqrt{3}},0\right)$ и $D\left(0,0,\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Тогда, используя формулы (3), имеем $M\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $N\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $P\left(-\frac{4}{3},0,0\right)$, $K\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Отсюда $\overrightarrow{PK} = \left\{\frac{4}{3},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}$ и $\overrightarrow{MN} = \left\{2,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}$. Используя формулу (2), получаем

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right|}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{9}{\sqrt{91}},$$ отсюда $\varphi = \arccos\frac{9}{\sqrt{91}}$. ***Ответ.*** $\arccos\frac{9}{\sqrt{91}}$

Угол между плоскостями

Двугранным углом в пространстве называется фигура, образованная двумя полуплоскостями (*гранями*) с общей граничной прямой (*ребром*). Мерой двугранного угла называется мера его *линейного угла*, получающегося при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной к его ребру. Она равна величине угла между лучами (полупрямыми), по которым эта плоскость пересекает грани двугранного угла (рис. 6*а*). Двугранный угол может быть острым, прямым или тупым, и его величина лежит в пределах от 0 до π.

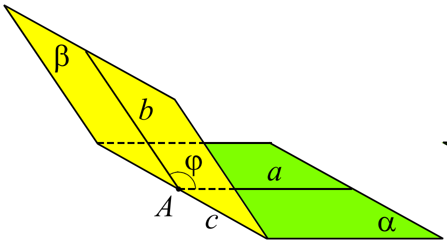


Рис. 6*а*

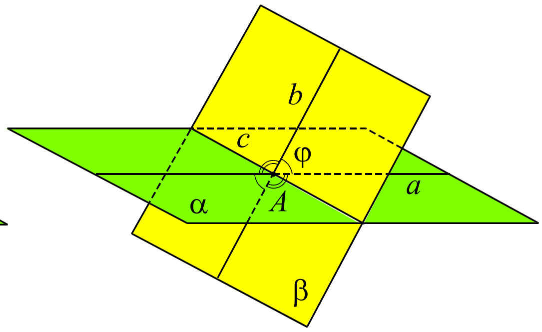


Рис. 6*б*

Две различные плоскости либо пересекаются, либо параллельны. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0. Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла (рис. 6*б*). Если же пересекающиеся плоскости не перпендикулярны, то величина угла между ними определяется как ме́ньшая из величин двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол между плоскостями лежит в пределах от 0 до $90°$.

Для нахождения угла между пересекающимися плоскостями наиболее часто используют следующие методы:

1) Поэтапно-вычислительный метод.

2) Координатно-векторный метод.

В первом случае задача сводится к построению линейного угла двугранного угла, образованного пересекающимися плоскостями α и β, и последующему его вычислению с помощью вспомогательного треугольника с применением теоремы косинусов.

Во втором способе задача сводится к нахождению угла между векторами нормалей плоскостей $\vec{n}_\alpha = \{p_1; q_1; r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2; q_2; r_2\}$ по формуле:

$$\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2 + r_1 \cdot r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}. \qquad (4)$$

Пример 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.

Решение. *1-й способ.* Пусть ребро куба равно 1. Прямая B_1D – линия пересечения плоскостей сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D, так как B_1 и D – их общие точки (рис. 7). В прямоугольных треугольниках B_1A_1D и B_1C_1D проведём высоты к гипотенузе B_1D из точек A_1 и C_1 соответственно. Поскольку треугольники B_1A_1D и B_1C_1D равны, то эти высоты «сойдутся» в одной точке N. Следовательно, $\angle A_1NC_1$ – линейный угол двугранного угла $A_1B_1DC_1$.

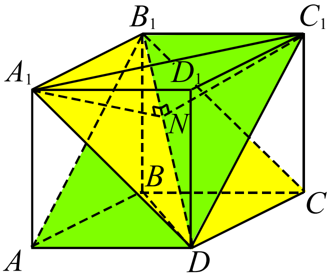


Рис. 7

Поскольку прямоугольные треугольники B_1A_1D и B_1C_1D равны, то равны и высоты A_1N и C_1N, опущенные на гипотенузу B_1D.

Длины указанных высот можно найти, например, через площадь любого из этих треугольников: $A_1N = C_1N = \sqrt{2/3}$.

Далее, рассмотрим равнобедренный треугольник A_1C_1N. В нём $A_1C_1 = \sqrt{2}$. Найдём угол A_1NC_1, воспользовавшись теоремой косинусов для стороны

$$A_1C_1:\ \cos\angle A_1NC_1 = \frac{A_1N^2 + C_1N^2 - A_1C_1^2}{2\cdot A_1N\cdot C_1N} = \frac{\left(\sqrt{2/3}\right)^2 + \left(\sqrt{2/3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{2/3}} = -0,5.$$

Отсюда $\angle A_1NC_1 = \dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, искомый угол равен $\dfrac{\pi}{3}$. ***Ответ:*** $\dfrac{\pi}{3}$.

Прежде чем решать вторым способом, отметим следующее.

Вектор нормали плоскости – любой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Если плоскость α задана уравнением $p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0$, то ее векторами их нормали имеет координаты $\vec{n}_\alpha = \{p_1; q_1;\ r_1\}$.

Для нахождения вектора нормали достаточно знать координаты трех точек плоскости M, N, P, не лежащих на одной прямой. В этом случае находим координаты двух векторов плоскости $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{MP} = \{b_1; b_2; b_3\}$. Предположим, что вектор с координатами $\vec{n} = \{p; q; r\}$ (здесь p, q, r – неизвестные числа, которые нужно найти) перпендикулярен любому вектору плоскости α, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в том числе. Его координаты ищутся из условий равенства нулю скалярных произведений $\vec{n}$ с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{a} = 0, \\ \vec{n}\cdot\vec{b} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1p + a_2q + a_3r = 0, \\ b_1p + b_2q + b_3r = 0. \end{cases}$$

2-й способ. Пусть ребро куба равно 1. Найдем вектор нормали плоскости AB_1C_1. Рассмотрим два вектора этой плоскости $\overrightarrow{AB_1} = \{0, 1, 1\}$ и $\overrightarrow{AD} = \{1, 0, 0\}$ (рис. 8). Пусть $\overrightarrow{n_1} = \{p_1; q_1; r_1\}$. Получаем систему

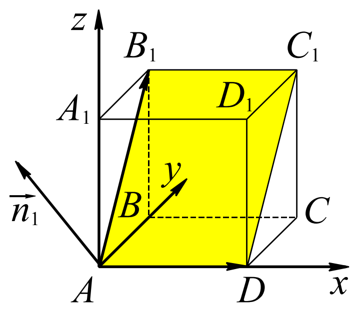


Рис. 8

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AB_1} = 0, \\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot p_1 + 1\cdot q_1 + 1\cdot r_1 = 0, \\ 1\cdot p_1 + 0\cdot q_1 + 0\cdot r_1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = 0,\ q_1 = -r_1.$$

Эта система имеет бесконечное множество решений, так как векторов, перпендикулярных плоскости AB_1C_1, бесконечно много. Выберем из данного множества ненулевой вектор $\overrightarrow{n_1}$, положив $r_1 = 1$. Тогда $\overrightarrow{n_1} = \{0, -1, 1\}$.

Аналогично получим, что $\overrightarrow{n_2} = \{1, 0, 1\}$.

Тогда по формуле (4) получаем $\cos\varphi = \dfrac{|0+0+1|}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{1+0+1}} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Замечание. Преимущество второго способа в общем случае состоит в том, что для вычисления угла между пересекающимися плоскостями не обязательно строить линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, а достаточно знать для каждой плоскости координаты трех точек лежащей в ней.

Так, например, в приведенной ниже задаче построение линейного угла не столь очевидно.

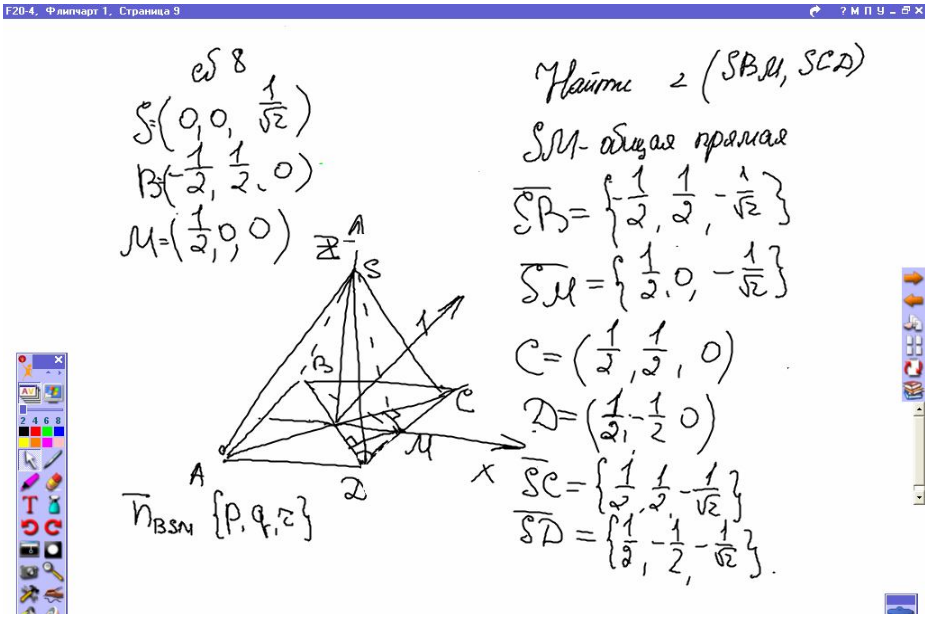
Задача (С4 ЕГЭ 2010). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол меду плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1.

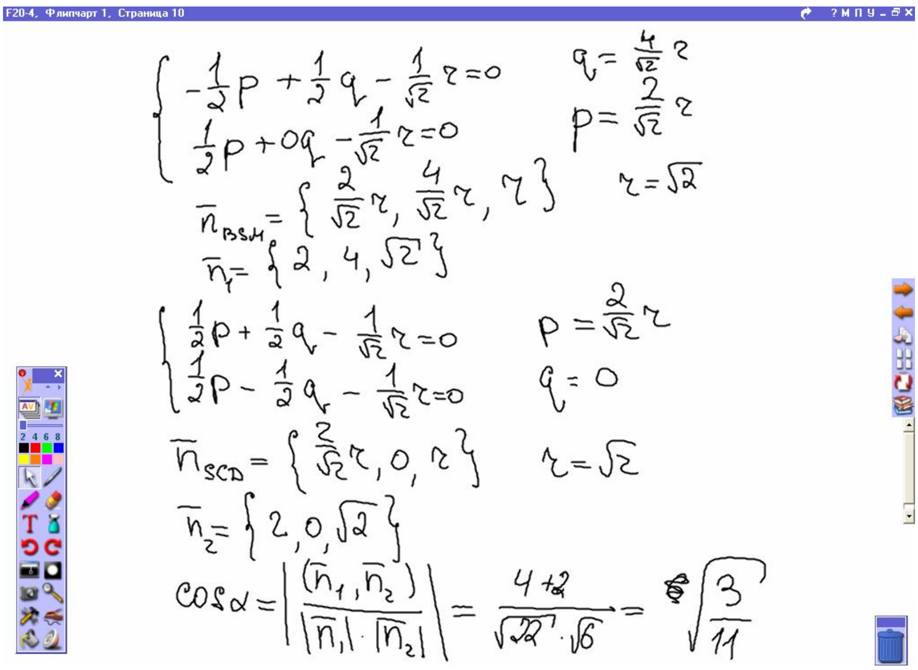
Отметим, что пример 3 можно решить, используя тот факт, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Так на рис. 7 $AD_1 \perp A_1B_1C$, $CD_1 \perp AB_1C_1$, а угол между прямыми AD_1 и CD_1 легко находится из равностороннего треугольника AD_1C.

Также в качестве примера ниже продемонстрирован фрагмент урока (или точнее слайды, оставшиеся на интерактивной доске после решения задачи школьником) в 10-м классе.

Пример 4. Все ребра пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны между собой. Найдите угол между плоскостями SBM и SCD, где точка M – середина ребра CD.

Решение. Сначала было показано, что данная пирамида правильная.





Ответ. $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

Угол между прямой и плоскостью

Углом между плоскостью α *и не перпендикулярной ей прямой* l называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость $0 < \angle(\alpha, l) < 90°$.

Пусть в пространстве введена декартова система координат, и плоскость α задана в этой системе координат уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда вектор нормали плоскости $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Пусть задан направляющий вектор прямой l: $\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$. Тогда синус угла φ между прямой и плоскостью определяется формулой (см. рис. 9):

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\alpha, l)) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{q}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \qquad (5)$$

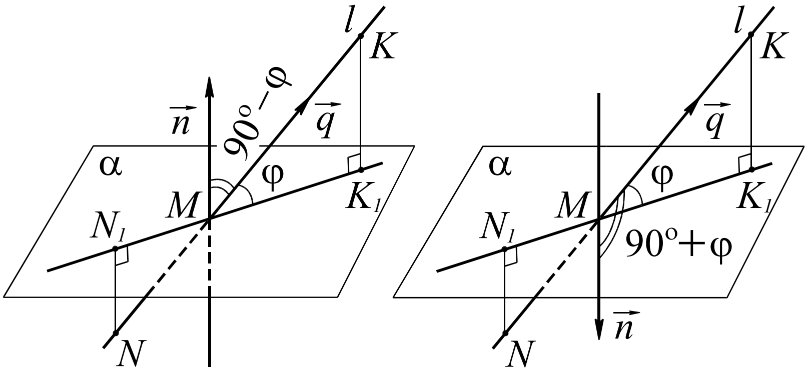


Рис. 9

Продолжение следует