

2. Докажите, что сумма ряда с общим членом $a_n = \frac{1}{n} : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ не существует («равна бесконечности»). Для этого:
- 1) докажите, что конечная сумма дробей с номерами от $2^{n-1} + 1$ до 2^n , т. е. сумма $\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ больше половины (подсказка: замените каждую из этих дробей на последнюю, которая является среди них самой маленькой);
 - 2) докажите, что частичная сумма ряда с номером 2^n , т. е. s_{2^n} , больше, чем $1 + \frac{n}{2}$;
 - 3) сделайте вывод, что частичные суммы становятся больше любого наперед заданного числа.
3. Вычислите сумму:
- 1) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$;
 - 2) $\frac{4}{3} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots$;
 - 3) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$;
 - 4) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$;
 - 5) $1 - (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2 - (\sqrt{2} - 1)^3 + \dots$;
 - 6) $\frac{1+2}{2^2} + \frac{1+2^2}{2^4} + \frac{1+2^3}{2^6} + \dots$.

Сюжеты и проекты

Сюжет 1. Из одной арифметической прогрессии строим новые

Дана арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots с разностью d_0 . Будут ли арифметическими прогрессиями следующие последовательности? Если ответ положителен, найдите разность новой прогрессии (1–9):

- 1) a_1, a_3, a_5, \dots ;
- 2) $a_2, a_5, a_8, a_{11}, \dots$;
- 3) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_n + c$;
- 4) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_n + kn$;
- 5) b_1, b_2, \dots , где $b_n = ka_n$;
- 6) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_n + n^2$;
- 7) b_1, b_2, \dots , где $b_1 = a_1 + \dots + a_k$, $b_2 = a_{k+1} + \dots + a_{2k}$, $b_3 = a_{2k+1} + \dots + a_{3k}$ и т. д.
- 8) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_{n+1} + a_n$;
- 9) b_1, b_2, \dots , где $b_n = 3a_{n+1} + 2a_n$.
- 10) будет ли последовательность $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \dots$ геометрической прогрессией?





Сюжет 2. Арифметические прогрессии и тождества

- 1) Пусть числа a, b, c составляют арифметическую прогрессию. Докажите тождества:
 - а) $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$;
 - б) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$;
 - в) $\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$.
- 2) Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.
- 3) a_k, a_l, a_m — члены арифметической прогрессии с номерами k, l, m соответственно. Докажите тождество $(l-m)a_k + (m-k)a_l + (k-l)a_m = 0$.
- 4) Даны три многочлена $f_1 = x^2 - 2x - 1, f_2 = x^2 + 1, f_3 = x^2 + 2x - 1$. Докажите, что их квадраты образуют арифметическую прогрессию.
- 5) Могут ли числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?



Сюжет 3. Спектр числа $\sqrt{2}$

- 1) С помощью калькулятора составьте последовательность целых частей чисел $[\sqrt{2}], [2\sqrt{2}], [3\sqrt{2}], \dots, [20\sqrt{2}]$. Последовательность $[x], [2x], [3x], \dots$ называют *спектром* числа x .
- 2) Составьте первые двадцать членов спектра числа $2 + \sqrt{2}$.
- 3) Проверьте, что каждое целое число (до 25) входит в один из найденных спектров и ни одно из них не встречается в обоих спектрах.
- 4) Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1$.
- 5) Докажите, что $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} + \left\{ \frac{n}{2 + \sqrt{2}} \right\} = 1$.
- 6) Докажите, что $\left[\frac{n}{\sqrt{2}} \right] + \left[\frac{n}{2 + \sqrt{2}} \right] = n - 1$, где n — целое число.
- 7) Сравните количество членов в последовательностях $[\sqrt{2}], [2\sqrt{2}], \dots$ и $[2 + \sqrt{2}], [2(2 + \sqrt{2})], \dots$ до тех пор, пока члены этих последовательностей не превосходят чисел $\left[\frac{20}{\sqrt{2}} \right]$ и $\left[\frac{20}{2 + \sqrt{2}} \right]$ соответственно.



Сюжет 4. Из одной геометрической прогрессии строим новые

Дана геометрическая прогрессия a_1, a_2, \dots со знаменателем q_0 . Будут ли геометрическими прогрессиями следующие последовательности? Если ответ положителен, найдите знаменатель новой прогрессии (1–9):

- 1) a_2, a_4, a_6, \dots ;
- 2) $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$;

- 3) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$;
- 4) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots$;
- 5) b_1, b_2, \dots , где $b_n = 2a_n$;
- 6) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_n^2$;
- 7) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_{n+1} + a_n$;
- 8) b_1, b_2, \dots , где $b_n = ka_{n+1} + la_n$;
- 9) b_1, b_2, \dots , где $b_n = a_{n+1} \cdot a_n$.

Сюжет 5. Геометрические прогрессии и тождества

Пусть числа a, b, c и d образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождества.

- 1) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.
- 2) $(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$.
- 3) Пусть числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождество $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$.
- 4) Существует ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию?
- 5) Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами одной геометрической прогрессии?
- 6) В геометрической прогрессии $a_{m+n} = x$, $a_{m-n} = y$. Докажите, что $a_m = \sqrt{xy}$.

Проекты по этой главе предназначены для коллективной работы. По одной теме предлагаются разные подходы, которые можно использовать параллельно.

Проект 1. Прогрессии в геометрии

<http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 9 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 9 класс:

— глава 10, пункт 1 «Числовые последовательности», 2–5, 7, 8.

Цель работы: познакомиться с последовательностями, возникающими при геометрических построениях, и научиться переносить в геометрию новые работы с прогрессиями.

Выберите геометрический объект из следующего списка.

1. Треугольник.
2. Квадрат.
3. Круг.



4. Угол.

5. Пирамида.

Выполните предложенные построения и вычисления для выбранного объекта.

1. Треугольник

В треугольнике соединяют середины сторон и получают новый треугольник, с которым поступают аналогично. Так получают последовательность треугольников ρ_1, ρ_2, \dots (рис. 14). Параметры этих треугольников имеют те же номера, что и сами треугольники (например, ρ_k — периметр треугольника ρ_k и т. п.).

а) Какие последовательности образуют следующие величины?

- периметры p_1, p_2, \dots построенных треугольников;
- площади S_1, S_2, \dots треугольников;
- суммы $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ их углов;
- радиусы R_1, R_2, \dots описанных окружностей.

б) Вычислите суммы $p = p_1 + p_2 + \dots$ и $S = S_1 + S_2 + \dots$.

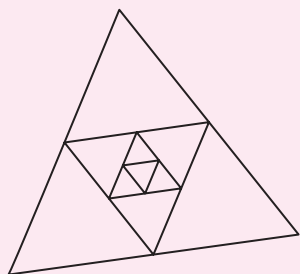


Рис. 14

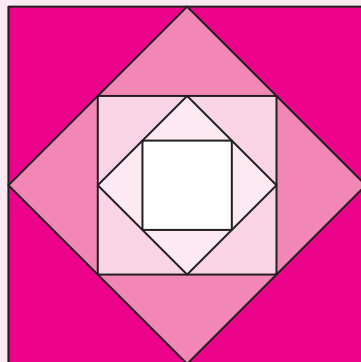


Рис. 15

2. Квадрат

В квадрате соединяют середины сторон и получают новый квадрат, с которым поступают аналогично (рис. 15). Обозначим последовательность построенных квадратов через K_1, K_2, \dots , а через L_i обозначим часть квадратов K_i , получающуюся после вырезания из него следующего квадрата K_{i+1} ($K_i = L_i \cup K_{i+1}$).

а) Какие последовательности образуют следующие величины?

- стороны квадратов a_1, a_2, \dots ;
- площади S_1, S_2, \dots ;
- площади T_1, T_2, \dots фигур L_1, L_2, \dots ;

— объемы V_1, V_2, \dots кубов с гранями, равными квадратам K_1, K_2, \dots .

- б) Вычислите суммы $a = a_1 + a_2 + \dots$, $S = S_1 + S_2 + \dots$, $T = T_1 + T_2 + \dots$, $V = V_1 + V_2 + \dots$.

3. Круг

В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат вписан круг, в этот круг вписан второй квадрат и т. д. до бесконечности (рис. 16).

- а) Какие последовательности образуют радиусы R_1, R_2, \dots построенных кругов, их площади S_1, S_2, \dots , стороны a_1, a_2, \dots квадратов и площади T_1, T_2, \dots квадратов.
б) Вычислите суммы $R_1 + R_2 + \dots$ и $T_1 + T_2 + \dots$.

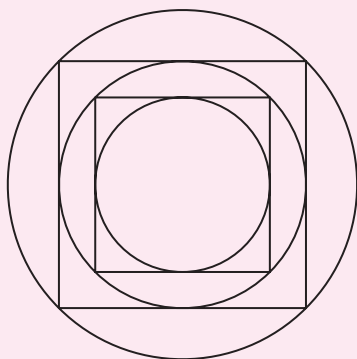


Рис. 16

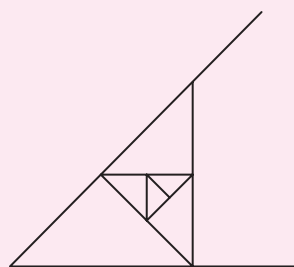


Рис. 17

4. Угол

На стороне угла в 45° взята точка на расстоянии 1 от вершины. Из этой точки опущен перпендикуляр на вторую сторону, из основания этого перпендикуляра — новый перпендикуляр на первую сторону и т. д. (рис. 17). Вычислите сумму длин всех перпендикуляров.

Решите задачу, аналогичную предыдущей, но для угла в 30° .

5. Пирамида

Ядра укладывают в виде правильной n -угольной пирамиды, имеющей k слоев (рис. 18).

Какую последовательность образуют числа ядер в одном слое (при $n = 3$ и 4)?

Вычислите общее число ядер при следующих данных:

- а) $n = 3$, $k = 10$;
б) $n = 4$, $k = 12$;
в) $n = 3$, в нижнем слое 210 ядер;

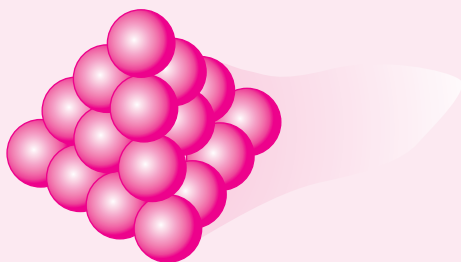


Рис. 18

г) $n = 3$, пирамида усечена — в нижнем слое 105 ядер, в верхнем — 36;

д) $n = 4$, пирамида усечена, имеет 9 слоев и в верхнем слое 49 ядер.

Сравнение результатов

Сделайте обзор заданий по объектам а)–д). Найдите общие характеристики последовательностей.



Проект 2. Вычисление квадратного корня

<http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 9 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 9 класс:

— глава 10, пункт 1 «Числовые последовательности», 9.



Цель работы: познакомиться с различными методами приближенных вычислений на примере вычисления квадратного корня.

Выберите метод вычислений из следующего списка.

1. Метод последовательных приближений.
2. Метод половинного деления.
3. Метод касательных Ньютона.

Выполнение вычислений

1. *Метод последовательных приближений.* Для приближенного вычисления квадратного корня из a ($a > 0$) можно взять произвольное начальное значение $x_1 > 0$ и построить последовательность, задаваемую рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$.

1) Подставьте в рекуррентную формулу вместо x_{n+1} и x_n неизвестное число x и решите полученное уравнение. Ответ $x = \sqrt{a}$ показывает, что если мы «перейдем к пределу», т. е. заменим при больших номерах n число x_n на x , то мы действительно получим \sqrt{a} .

2) Возьмите $a = 9$, $x_1 = 3$ и устно убедитесь, что при всех n число x_n одно и то же и равно $3 = \sqrt{9}$.

3) Возьмите $a = 10$, $x_1 = 3$ и подсчитайте $\sqrt{10}$ с шестью верными знаками после запятой. Для проверки верности цифр воспользуйтесь калькулятором.

4) Обозначим через y_n относительную погрешность, т.е. число $\frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

а) выразите x_n через y_n ;

б) подставьте в рекуррентную формулу вместо x_{n+1} и x_n найденные выражения через y_{n+1} и y_n и докажите рекуррентную формулу

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{2(1 + y_n)};$$

в) проверьте, что $y_n > 0$ (при $n \geq 2$);

г) докажите, что $y_{n+1} < \frac{y_n}{2}$ (при $n \geq 2$).

Из последнего неравенства вытекает, что относительная погрешность вычисления на каждом шаге уменьшается вдвое.

2. Метод половинного деления. Метод половинного деления применяется для приближенного вычисления корня уравнения. Пусть мы решаем уравнение $f(x) = 0$ и знаем, что на конечном промежутке $[a; b]$ этот корень единственный, причем функция f на концах промежутка принимает значения разных знаков. Делим отрезок $[a; b]$ пополам, вычисляем значение функции f в его середине и из двух отрезков $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ выбираем тот, на концах которого значения функции f снова будут разных знаков. Продолжая деление пополам, мы можем поместить корень внутрь отрезка сколь угодно малой длины.

1) Постройте график функции $y = x^5 + x - 1$ на отрезке $[0; 1]$, нанеся несколько точек. Убедитесь, что на этом отрезке уравнение $x^5 + x - 1 = 0$ должно иметь один корень.

2) Вычислите значения y при $x = 0,5; 0,75; 0,875; 0,8125; 0,78125$.

3) Продолжите вычисления, пока не получите значения корня с точностью до 10^{-5} .

3. Метод касательных Ньютона. Ньютон предложил метод приближенного нахождения корня уравнения, который «работает» быстрее, чем метод половинного деления. Для уравнения $x^5 + x - 1 = 0$ и промежутка $[0; 1]$ этот метод выглядит следующим образом.

1) Рассмотрите последовательность с первым членом $x_1 = 1$ с помощью рекуррентной формулы Ньютона $x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{5x_n^4 + 1}$, где y_n — значение функции $y = x^5 + x - 1$ при $x = x_n$. Вычислите x_2 и x_3 .

2) Продолжите вычисления до тех пор, пока y_n не станет меньше, чем 10^{-5} .

Замечание. Метод Ньютона называют методом касательных, потому что новая точка $P_{n+1}(x_{n+1}; y_{n+1})$ строится из предыдущей $P_n(x_n; y_n)$ с помощью проведения касательных (рис. 19).

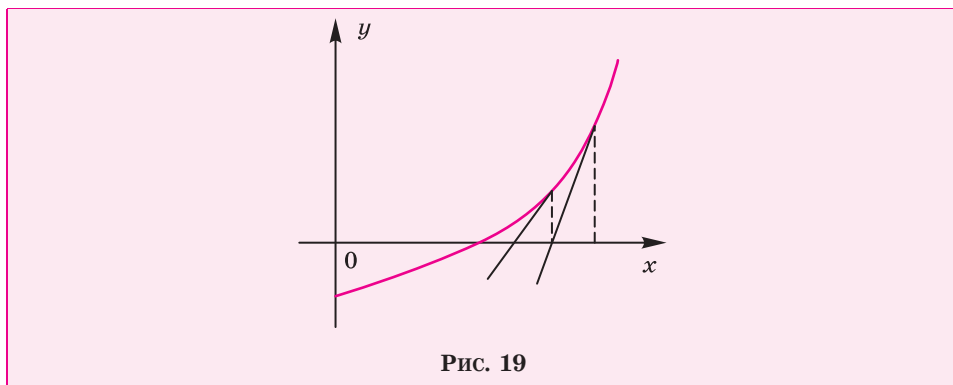


Рис. 19

Сравните точность вычислений положительного корня уравнения $x^2 - 10 = 0$, найденного разными методами.



Проект 3. Суммирование последовательностей

Цель работы: познакомиться со свойствами сумм арифметической и геометрической прогрессий и различными методами вычисления сумм других последовательностей.

Методы суммирования

Выберите метод суммирования из следующего списка.

1. Суммы арифметических прогрессий.
2. Суммы геометрических прогрессий.
3. Суммы степеней натуральных чисел.
4. Индуктивное построение.
5. Числа Бернулли.

1. *Суммы арифметических прогрессий.* Пусть S_n — сумма n членов некоторой арифметической прогрессии.

- 1) Докажите, что $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$.
- 2) Пусть $S_m = n$, $S_n = m$. Докажите, что $S_{m+n} = -(m+n)$.

- 3) Докажите, что $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

4) Докажите, что для всякой арифметической прогрессии верно тождество

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = \frac{n}{2n-1} (a_1^2 - a_{2n}^2).$$

5) Пусть $f(x) = ax^2 + bx$. Докажите, что существует такая арифметическая прогрессия, для которой сумма n членов s_n равна значению функции f при $x = n$: $s_n = f(n)$.

2. Суммы геометрических прогрессий.

1) Докажите тождество $s_n = a_1 \cdot a_n(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1})$.

2) Пусть a_1, a_2, \dots — геометрическая прогрессия. Докажите, что отношение сумм $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}$ и $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$ равно знаменателю этой прогрессии.

3) Пусть t_1, t_2, \dots — суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий с первыми членами 1 и знаменателями q, q^2, \dots, q^n соответственно. Докажите, что

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} = n - \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot q.$$

4) Пусть s_k — сумма k членов геометрической прогрессии.

Докажите, что $s_n(s_{3n} - s_{2n}) = (s_{2n} - s_n)^2$.

5) Пусть a_1, a_2, \dots — геометрическая прогрессия с положительными членами, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$:

а) докажите, что $\frac{s_n}{t_n} = a_1 a_n$;

б) докажите, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \left(\frac{s_n}{t_n}\right)^{\frac{n}{2}}$;

в) докажите, что $a_n^2 = \frac{s_{2n-1}}{t_{2n-1}}$.

3. Суммы степеней натуральных чисел. Мы уже знаем сумму

$$s_n^{(1)} = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача состоит в отыскании степенных сумм

$$s_n^m = 1^m + 2^m + \dots + n^m = \sum_{k=1}^n k^m.$$

Найти сумму квадратов первых n чисел натурального ряда $s_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Запишем формулу для куба суммы $k+1$: $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Запишем эти формулы для $k = 1, 2, \dots, n$ и сложим

$$(1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$

$$(2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

При сложении кубы будут взаимно уничтожаться (кроме первого справа и последнего слева):

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

Отсюда выразим $s_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 3s_n^{(2)} &= (n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n+1}{2} \cdot (2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n) = \frac{n+1}{2} \cdot (2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $s_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Такой же прием применим для последовательного нахождения суммы кубов, суммы четвертых степеней и т. д.

4. *Индуктивное построение.* Этот прием является самым общим, хотя и достаточно трудным. При его применении производят численный эксперимент — вычисляют суммы s_1, s_2, s_3, \dots , затем угадывают ответ и проверяют его.

Найти сумму $s_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$.

Вычисляем: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 4 = 5$, $s_3 = 23$, $s_4 = 119$.

Легко заметить, что полученные суммы на 1 отличаются от последовательности факториалов 2, 6, 24, 120 и т. д.

Можно предположить, что $s_n = (n+1)! - 1$.

Для проверки сравним две соседние суммы. Допустим, мы уже знаем, что $s_n = (n+1)! - 1$. Подсчитаем $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = s_n + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$.

Мы видим, что если $s_n = (n+1)! - 1$, то следующая сумма s_{n+1} вычисляется по такой же формуле. Так как у нас есть экспериментальная база (мы знаем, что s_1, s_2, s_3 вычисляются по такой же формуле), то мы можем, начиная с нее, двигаться вверх: зная формулу для s_3 , докажем ее справедливость для s_4 ; зная ее для s_4 , получим ее для s_5 и т. д.

Различные формулы суммирования были известны математикам древнего мира и средних веков. Много таких формул получил Архимед, вычисляя площади и объемы. Арабские математики предложили такие формулы:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2; \quad \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3};$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n+1}{5} \cdot n \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(n(n+1) - \frac{1}{3} \right);$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k.$$

5. *Числа Бернулли.* Якоб Бернулли (1654-1705) искал (и нашел!) формулу для вычисления степенных сумм. В одном из писем он пишет: «... в течение восьми минут я нашел сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел», т. е. число $s_{1000}^{(10)}$. Для вычислений он ввел последовательность чисел B_0, B_1, B_2, \dots , которая задается рекуррентно. Пусть $B_0 = 1$. Если уже вычислены B_0, B_1, \dots, B_{n-1} , то для вычисления B_n надо проделать следующее. Используя формулу бинома Ньютона, раскрыть символическое равенство $(B+1)^{n+1} - B_{n+1} = 0$, заменяя степень B^k на B_k , и вычислить B_n . Например,

$$(B+1)^2 - B_2 = B_2 + 2B_1 + 1 - B_2 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2};$$

$$(B+1)^3 - B_3 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1 - B_3 = 0 \Rightarrow 3B_2 = -3B_1 - 1.$$

Обратите внимание на то, что после раскрытия член B_{n+1} пропадет, а около искомого числа B_n будет стоять коэффициент $C_{n+1}^1 = n+1$.

1) Вычислите первые 10 чисел Бернулли: $B_0 = 1, B_1, B_2, \dots, B_{10}$.

2) И. Бернулли доказал замечательную формулу для вычисления степенных сумм $s_n^{(k)} = 1^k + \dots + n^{k-1}$:

$$s_n^{(k)} = \frac{1}{k+1} (n^{k+1} + C_{k+1}^1 B_1 n^k + C_{k+1}^2 B_2 n^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k B_k n).$$

Проверьте эту формулу для известных вам значений сумм $s_n^{(k)}$ при $k = 1, 2, 3, 4$.

3) Вычислите, как Я. Бернулли, сумму $s_{1000}^{(10)}$.

Проект 4. Классы вычетов



Цель работы: познакомиться с классами вычетов и действиями над ними.

Численный эксперимент

1. *Действия над классами вычетов.* В § 2 были определены классы вычетов и было показано, что все целые числа разбиваются на m арифметических прогрессий, в каждую из которых попадают все числа, имеющие одинаковый остаток при делении на m . Например, при $m = 5$ получили 5 прогрессий со знаменателем 5:

$$\begin{aligned} & \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots; \\ & \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots; \\ & \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots; \\ & \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots; \\ & \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \end{aligned}$$