

Сюжеты и проекты

Сюжет 1. Составление уравнения

Составьте уравнение по следующим условиям и решите его.

- 1) При каких значениях x дробь $\frac{0,5}{3x+1}$ меньше $\frac{1}{18x^2+12x+2}$ на 1?
- 2) При каких значениях x дробь $\frac{x^2-5}{x-1}$ в 9 раз меньше, чем $7x+10$?
- 3) При каких значениях x сумма дробей $\frac{x^2}{x^2-7x+10}$ и $\frac{16}{3x^2-12}$ равна 1?
- 4) При каких значениях x дробь $\frac{4}{2x^2-3x-9}$ меньше дроби $\frac{x^2}{2x^2+x-3}$ на $\frac{1}{2}$?

Сюжет 2. Корень квадратного трехчлена и его коэффициенты

1. Корень определяет коэффициент

Дан квадратный трехчлен, коэффициенты которого зависят от одного параметра a . Найдите значение параметра, если известно, что $x = 2$ является корнем трехчлена. Найдите его второй корень.

- 1) $x^2 + ax + 3$;
- 2) $x^2 + 6x + a$;
- 3) $ax^2 - 2x + 5$;
- 4) $x^2 - (a+1)x + 3 - a$.

2. Коэффициенты определяют знаки корней

Теорема Виета помогает, взглянув на уравнение, определить знаки произведения и суммы корней. Этого достаточно, чтобы определить знаки корней (если корни существуют). По виду уравнения определите, какая возможность выполняется:

- а) два положительных корня;
- б) два отрицательных корня;
- в) два корня разных знаков, причем больший по модулю положителен;
- г) два корня разных знаков, причем больший по модулю отрицателен;
- д) среди корней есть нулевой;
- е) корней нет;
- ж) два корня совпали (то есть уравнение имеет один корень).

- 1) $x^2 + 5x - 10 = 0$;
- 2) $x^2 - 2x - 13 = 0$;
- 3) $x^2 + 2x + 5 = 0$;
- 4) $x^2 + 7x + 3 = 0$;
- 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
- 6) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
- 7) $x^2 - 7x + 13 = 0$;
- 8) $x^2 + 5x = 0$.

3. Роль старшего коэффициента

В учебнике в основном встречаются квадратные трехчлены со старшим коэффициентом 1. Они имеют вид $x^2 + px + q$. В девятом классе при исследовании квадратичной функции мы рассмотрим общий случай функции вида $y = ax^2 + bx + c$ и не будем предполагать, что коэффициент a равен единице. Сейчас обратим внимание на роль старшего коэффициента при работе с корнями. Заметьте, что квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ и $a(x^2 + px + q)$ при $a \neq 1$ различны, но их корни (при $a \neq 0$) одинаковы.

1). При решении уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ делим его на a и приводим к знакомому виду.

Решите уравнения:

а) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;

в) $-3x^2 + 6x + 10 = 0$;

б) $2x^2 + 4x - 7 = 0$;

г) $\frac{3}{4}x^2 - 12x + 1 = 0$.

2). При нахождении суммы и произведения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ выносим (в уме) коэффициент a : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$. Откуда сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Найдите сумму и произведение корней уравнений предыдущего пункта.

3) При определении знаков корней трехчлена $ax^2 + bx + c$ не забываем о роли a (см. предыдущий пункт).

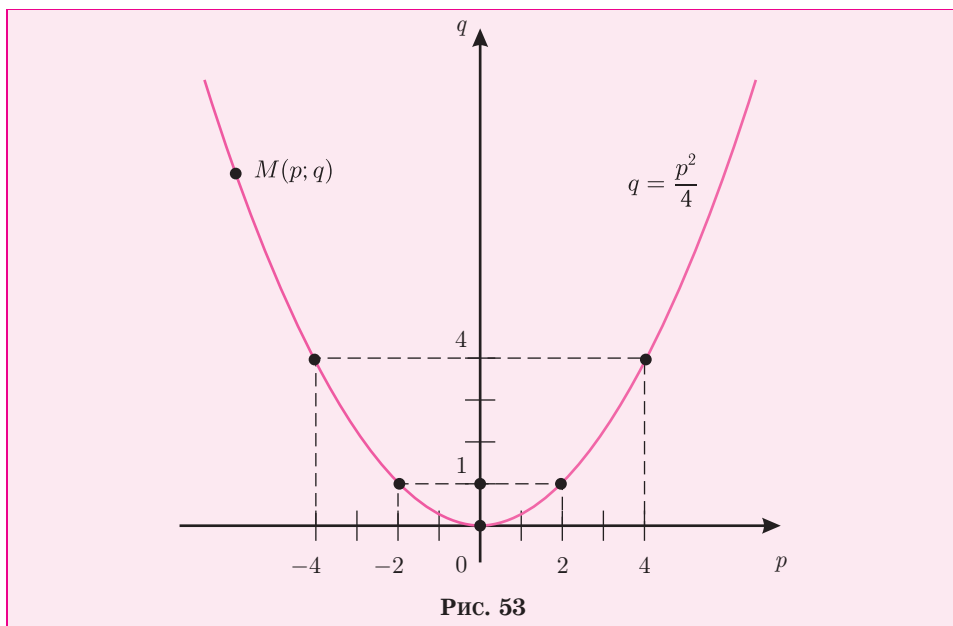
Найдите знаки корней (как в пункте 2) для указанных выше уравнений.

**Сюжет 3. Геометрическая иллюстрация свойств корней**

Введем на плоскости координаты, которые обозначим через p и q . Каждый квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ задается парой чисел $(p; q)$ и, следовательно, определяется точкой плоскости M с координатами $(p; q)$. Это позволяет изображать геометрически свойства трехчлена.

Мы забежим немного вперед и нарисуем график функции $q = \frac{p^2}{4}$ — параболу (рис. 53). Для точек $M(p; q)$, лежащих на параболе, то есть для квадратных трехчленов, у которых $q = \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow \frac{p^2}{4} - q = 0$, дискриминант равен нулю. Между ветвями (где расположена положительная полуось q) выполняется неравенство $q > \frac{p^2}{4}$, а в остальной части — противоположное неравенство $q < \frac{p^2}{4}$.

Теперь мы подготовлены к решению задач.



1) Перерисуйте аккуратно параболу $q = \frac{p^2}{4}$ в тетрадь, нанеся несколько ее точек (например, при $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$).

2) Обозначьте по-разному (штриховкой или цветом) те области на плоскости, точки которых соответствуют трехчленам с различными свойствами корней:

- а) два положительных корня;
- б) два отрицательных корня;
- в) два корня разных знаков, причем бóльший по модулю положителен;
- г) два корня разных знаков, причем бóльший по модулю отрицателен;
- д) среди корней есть нулевой;
- е) корней нет;
- ж) один корень, при этом положительный;
- з) один корень, при этом отрицательный.

3) Целые точки, то есть точки с целыми координатами, соответствуют трехчленам с целыми коэффициентами.

Подсчитайте число целых точек, которые соответствуют следующим условиям:

- а) корней нет и $q \leq 4$;
- б) два положительных корня и $|p| \leq 5$;
- в) два корня и $|p| \leq 5, |q| \leq 5$.



Сюжет 4. Трехчлен с целыми корнями

В задании 1 к § 2 мы перечислили все квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$ при $|p|, |q| \leq 12$ с целыми коэффициентами и целыми корнями. Изучим принципы подсчета числа трехчленов с целыми корнями.

- 1) Подсчитайте их количество для $|q| \leq 12$, исключив случай $q = 0$.
- 2) Пусть $|q|$ — простое число. Сколько есть трехчленов с целыми корнями и с данным значением $|q|$?
- 3) Тот же вопрос, если $|q|$ — квадрат простого числа.
- 4) Тот же вопрос, если $|q|$ есть произведение двух простых чисел.
- 5) Тот же вопрос, если $|q|$ есть произведение k различных простых чисел.
- 6) Тот же вопрос, если $|q| = p_1^{k_1} p_2^{k_2}$, где p_1, p_2 — простые числа.
- 7) Какова вероятность того, что наугад написанный трехчлен $x^2 + px + q$ с целыми p и q , причем $|q| \leq 12$, $q \neq 0$, $|p| \leq 13$, имеет целые корни?



Проект 1. Исследование корней квадратного уравнения с параметром



<http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 8 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 8 класс:

— глава 7, пункт 5 «Задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям», 8.



Постановка задачи

Дано квадратное уравнение относительно x , коэффициенты которого содержат параметр a :

$$x^2 + 2(a - 3)x + a^2 + 2a = 0.$$

Цель проекта: научиться применять знания о корнях квадратного уравнения к исследованию семейства уравнений с одним параметром.

Численный эксперимент

Решите уравнение при следующих значениях параметра: $a = 0$; $a = 1$; $a = 3$; $a = -4$.

Исследование

Исследуйте это уравнение, ответив на следующие вопросы.

- 1) При каких значениях параметра a уравнение имеет нулевой корень?
- 2) При каких значениях a число 1 является корнем уравнения?
- 3) При каких значениях a уравнение имеет два корня, один корень или вообще не имеет корней?
- 4) Что можно сказать о знаках корней уравнения при $a = -1$?

5) Может ли быть так, что уравнение имеет два корня и при этом их сумма отрицательна?

6) При каком значении a трехчлен, стоящий в левой части уравнения, является полным квадратом? Найдите его.

7) При каких значениях a сумма квадратов корней равна 66? Проверьте, при каждом ли найденном значении a корни действительно существуют.

Обобщение

Различение букв (x — неизвестное, a — параметр) в уравнении $x^2 + \dots = 0$ является условным.

1. Рассмотрите исходное уравнение как квадратное уравнение относительно a с коэффициентами, зависящими от x .

а) Решите это уравнение при $x = 1$.

б) Вычислите его дискриминант.

в) При каких значениях x уравнение относительно a имеет 2 корня?

2. Постройте на плоскости $(a; x)$ точки, соответствующие следующим значениям a : $a = 0$; $a = 1$; $a = \frac{9}{8}$; $a = -1$.

Соедините построенные точки плавной кривой. Как называется эта кривая?

Проект 2. Корни квадратного трехчлена



Постановка задачи

Выделив полный квадрат, мы пишем квадратный трехчлен в виде $P(x) = x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - d$, где $d = \frac{D}{4}$, $D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{p^2 - 4q}{4}$. Нам известно, как от знака дискриминанта D (или d) зависит число вещественных корней квадратного трехчлена. Задачи этой серии предлагают другие условия, позволяющие находить число корней.

Цель проекта: научиться определять число корней квадратного трехчлена в зависимости от различных исходных данных

Исследование

1) Докажите, что если $d < 0$, то все значения квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ положительны: $D < 0 \Rightarrow P(x) > 0$.

2) Докажите, что, если в некоторой точке $x = a$ значение квадратного трехчлена отрицательно, то трехчлен имеет два корня.

3) Если для некоторых двух чисел a и b произведение значений $P(a) \cdot P(b) < 0$, то трехчлен имеет два корня.

4) Если $1 + p + q < 0$, то трехчлен имеет два корня.

5) Если $1 + q < p$, то трехчлен имеет два корня.

6) Если $q < 0$, то трехчлен имеет два корня.

7) Докажите, что уравнение $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) + (x-3)(x-1) = 0$ имеет два корня.

8) Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ имеет два корня при любых различных между собой числах a , b и c .

Исследование корней квадратного уравнения с параметром

Дано квадратное уравнение относительно x , коэффициенты которого содержат параметр a : $x^2 + 2(a-3)x + a^2 + 2a = 0$. Исследуйте это уравнение, ответив на следующие вопросы:

- 1) При каких значениях параметра a уравнение имеет нулевой корень?
- 2) При каких значениях a число $x = 1$ является корнем уравнения?
- 3) При каких значениях a уравнение имеет 2 корня, один корень или вообще не имеет корней?

4) Что можно сказать о знаках корней уравнения при $a = -1$?

5) Может ли уравнение иметь два корня, сумма которых отрицательна?

6) При каком значении a трехчлен, стоящий в левой части уравнения, является полным квадратом? Найдите его.

7) При каких значениях a сумма квадратов корней равна 66? Проверьте, при каждом ли найденном значении a корни действительно существуют.

8) Рассмотрим исходное уравнение как квадратное уравнение относительно a с коэффициентами, зависящими от x .

а) Решите это уравнение при $x = 1$.

б) Вычислите его дискриминант.

в) При каких значениях x уравнение относительно a имеет 2 корня?

Обобщение

Положительность дискриминанта

В уравнении $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$:

1) Раскройте скобки. Запишите левую часть уравнения как $x^2 + px + q$.

2) Составьте дискриминант D получившегося трехчлена.

3) Запишите условие существования двух вещественных корней в виде $D > 0$ и докажите, что это условие выполняется.

4) Докажите, что уравнение $x^2 + \frac{a^2+1}{a}x + 1 = 0$ имеет корни при любом $a \neq 0$.

5) Докажите, что уравнение $x^2 + (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2} = 0$ не имеет корней ни при каких различных a и b .

6) Пусть $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ или $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$ имеет вещественный корень.