

28. Тест

Найдите одночлен, выражающий	$\frac{1}{3} \pi hr^2$	πhr^2	πr^2	$2\pi r$	$\frac{1}{2} ab$	abc
площадь прямоугольного треугольника						
площадь круга						
объем параллелепипеда						
объем цилиндра						
объем конуса						

29. Определите объем параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a , а высота равна h .

1) $a = 0,5$; $h = 4$;

3) $a = 2m$; $h = n$;

2) $a = p$; $h = 0,7$;

4) $a = 0,5$; $h = x$.

Беседа. Знакомимся с историей алгебры

История алгебры связана со многими замечательными именами. Для первого знакомства мы выбрали пять из них.

Диофант — отец теории чисел. Сведения о нем очень скудны. Жил и работал в III веке в Александрии — центре античной математики. Его основной сохранившийся трактат — «Арифметика» — был основой для размышлений многих математиков вплоть до нашего времени. Диофант впервые употребил буквенные обозначения для неизвестного, ввел знаки действий.

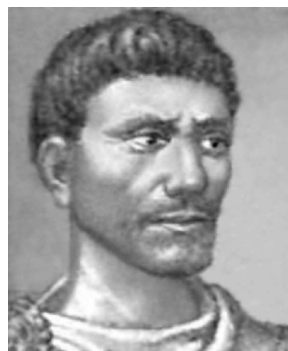
Диофант жил долго — об этом вы узнаете, если решите следующую задачу, которая сохранилась в надписи на его гробнице:

Путник!

Здесь прах погребен Диофанта

И числа поведать могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.

Шестую часть его представляло прекрасное детство.



Диофант
(примерно 250 г. н.э.)

Двенадцатая часть протекла еще жизни — покрылся
 Пухом тогда подбородок,
 Седьмую в безбрачии провел Диофант.
 Прошло пятилетие; в браке он был осчастливлен рождением
 Прекрасного первенца-сына,
 Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
 Дал на земле по сравненью с отцом.
 И в печали глубокой
 Старец земного удела конец воспринял, переживши
 Года четыре с тех пор, как сына лишился.
 Скажи, сколько лет жизни достигнув,
 Смерть воспринял Диофант?



Мухаммед Аль-Хорезми
(783–850)

«Настоящая» алгебра начинается с замечательного арабского математика Мухаммеда Аль-Хорезми, который жил в Хорезме (Хива) и Багдаде на границе VII и VIII веков. С его именем связаны два широко используемых термина: *алгебра* и *алгоритм*. Одно из главных сочинений Аль-Хорезми по арабски озаглавлено так: «*Китаб аль-джебр-аль-мукабала*».

Аль-джебр и аль-мукабала — это название двух операций, введенных Аль-Хорезми для решения уравнений (они соответствуют прибавлению к двум частям и вычитанию из двух частей уравнения одного и того же числа). Слово же *алгоритм* — это латинизированная запись имени самого математика.

Из сочинений Аль-Хорезми (изданных в Европе на латинском языке в XII веке) европейцы узнали о системе индийских цифр, употреблении нуля и позиционной записи числа (с тех пор эти цифры стали называться арабскими).

Аль-Хорезми предложил много способов решений различных уравнений (не забывайте, что до конца XIX века алгебра понималась как наука о решении уравнений).

Попробуйте догадаться о решении Аль-Хорезми квадратного уравнения $x^2 + 12x = 64$.

К квадрату с неизвестной стороной x (рис. 12) Аль-Хорезми пририсовал 4 прямоугольника так, чтобы их площадь равнялась $12x$. Тем самым затемненная фигура имеет площадь $x^2 + 12x$, т. е. изображает левую часть уравнения. Как он преобразовал чертеж, чтобы найти $x + 6$?

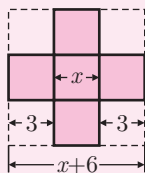


Рис. 12

Попробуйте способом Аль-Хорезми найти один корень уравнения $x^2 = 8x + 20$. Кстати, способом Аль-Хорезми находятся только положительные корни уравнения. Как в первом, так и во втором уравнении второй корень отрицателен. Во времена Аль-Хорезми люди еще не знали отрицательных чисел. Поэтому и уравнения записаны не обычным способом, например, $x^2 + 12x - 64 = 0$, а так, чтобы все участвующие числа были бы положительными.

Итальянский ученый Леонардо Пизанский, прозванный Фибоначчи, в 1202 г. написал сочинение, названное «*Книга абака*» (абака — это приспособление для вычислений), в котором познакомил европейцев с работами арабских математиков (и прежде всего Аль-Хорезми). Он впервые широко применял алгебру для решения геометрических вопросов.

С именем Фибоначчи связана знаменитая последовательность: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., в которой каждый член (начиная с третьего) равен сумме двух предыдущих. Эта последовательность возникла в следующей задаче.

Пара взрослых кроликов каждый месяц производит на свет новую пару кроликов, которая становится взрослой через два месяца (и затем каждый месяц производит новую пару). Если взять в первый месяц пару новорожденных кроликов, то сколько их станет через n месяцев?

По условию число пар кроликов в каждый месяц равно числу пар, которые существовали в предыдущем месяце, плюс число пар, рожденных в этом месяце. Это последнее число равно числу пар, которые жили два месяца назад (лишь они на данный момент являются взрослыми).

Чтобы лучше познакомиться с числами Фибоначчи, проведите численный эксперимент. Обозначьте первые числа так: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ и т. д.



Фибоначчи
(1170–1250)

1. Выпишите двадцать первых чисел Фибоначчи.
2. С какими номерами числа Фибоначчи являются четными? А с какими делятся на 3, а с какими на 5?
3. Сложите несколько первых чисел Фибоначчи. Что будет получаться при таком сложении?



Франсуа Виет
(1540–1603)



Эварист Галуа
(1811–1832)

Появление современной символической алгебры связано с именем «отца алгебры», французского ученого конца XVI века Франсуа Виета. Виет систематически обозначал коэффициенты (кстати, ему принадлежит честь введения этого термина) и неизвестные буквами.

В 1593 году голландский математик Адриан Романус предложил математикам Европы решить уравнение вида:

$$a^{45} - 45x^{43} + \dots - 3795x^3 + 45x = a.$$

Голландский посол во Франции заявил французскому королю Генриху IV, что никто из французских математиков не сможет решить это уравнение. Был призван Виет, который через несколько минут предъявил одно из решений уравнения, а на следующий день принес еще 22 корня.

Оставшиеся 22 корня были отрицательными, и Виет пропустил их, так как в те времена рассматривались только положительные корни уравнений.

«Те, кого любят боги, умирают молодыми» — эту фразу античного писателя Менандра часто вспоминают, говоря об Эваристе Галуа, который погиб на дуэли в возрасте 21 года.

Он оставил после себя несколько работ, которые были поняты лишь к концу XIX века. и которые перевернули все представления об алгебре.

Прежде всего, Галуа полностью исчерпал вопрос о решении алгебраических уравнений, (который, как мы уже знаем, был центральным вопросом алгебры). После Галуа алгебра стала рассматриваться как наука об операциях и их взаимодействиях.

Имя Галуа носят многие понятия и разделы современной алгебры (теория Галуа, группа Галуа, поле Галуа, расширение Галуа и т.д.).

Пример

Поле Галуа F_2 состоит из двух чисел 0 и 1 с такими правилами действий:

$$0 + 0 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0;$$

$$1 + 1 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1; \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Чему в поле Галуа F_2 равно значение выражения $x^2 + (x+1)^2 + x(x+1) + 1$ при $x = 1$?



Сюжеты и проекты

Сюжет 1. Десятичная запись натуральных чисел

1. Напомним, что десятичную запись натурального числа в общем виде можно представить как алгебраическое выражение. Например, трехзначное число \overline{abc} можно записать так $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 100a + 10b + c$. Запишите в виде алгебраических выражений следующие числа:

- 1) трехзначное число, все цифры которого одинаковы;
- 2) сумма произвольного трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке;
- 3) четырехзначное число, у которого совпадают первая и последняя цифры;
- 4) четырехзначное число, у которого цифры являются подряд идущими натуральными числами, например, 5678;
- 5) сумма чисел, получающихся следующим образом: берется трехзначное число с двумя одинаковыми цифрами, затем его цифры произвольно переставляются.

