

7). Приведите пример пятиугольника, который не покрывается кругами, построенными на его сторонах как на диаметрах.

#### 4. Оформление проекта

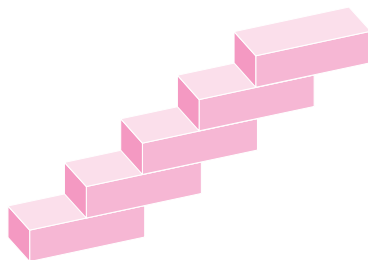
Выберите самые интересные геометрические неравенства, изобразите их в виде рисунков и алгебраических неравенств. Проект можно оформить на отдельных листах, в виде одного плаката или в виде компьютерной презентации.

## Проект 2. Гармонический ряд



### 1. Постановка задачи

Представим себе, что у нас имеются одинаковые кирпичи. Мы кладем на землю один из них, сверху другой со сдвигом, но так, чтобы он не упал. Затем кладем с некоторым сдвигом сверху третий и так далее. При этом мы накрываем над землей некоторую крышу и хотим, чтобы она была как можно большей.



*Цель работы:* придумать такой способ кладки кирпичей, чтобы можно было накрыть крышу произвольно большой длины.

### 2. Обсуждение необходимых сведений из физики

Для нашей задачи мы можем уподобить кирпичи постоянному отрезку, длину которого удобно принять за 2. Центр масс этого тяжелого однородного отрезка лежит в его середине. Идея построения состоит в том, что мы будем класть кирпичи не сверху, а подставлять их снизу. Чтобы конструкция не рухнула нам надо следить за тем, чтобы центр масс построенной конструкции при подсовывании под нее еще одного кирпича, «не свисал», т.е. проектировался по крайней мере на срез этого кирпича, а не вне его. При этом надо подсчитать, куда и насколько смещается центр масс.

Напомним следующий факт из механики. Если в точке  $A$  помещена масса 1, а в точке  $B$  — масса  $p$ , то центр масс системы из двух точек  $A$  и  $B$  находится в такой точке  $C$  отрезка  $AB$ , что  $1 \cdot AC = p \cdot BC$  (равенство моментов).

## 3. Предварительное вычисление

1) Первый шаг очевиден. Мы кладем второй кирпич под первый так, чтобы середина первого пришлась на край второго. Обозначим через  $A_1$  центр первого кирпича, а через  $A_2$  — центр масс системы из двух кирпичей. Вычислите  $A_1A_2$ .

2) Ясно, что  $A_2$  находится посередине отрезка  $AA_1$ . Можно считать, что в точках  $A$  и  $A_1$  — центрах масс двух кирпичей — сосредоточено по одинаковой единичной массе, поэтому центр масс такой системы будет лежать в середине отрезка  $AA_1$  — точке  $A_2$ . Итак, двумя кирпичами (длины 2) мы накрыли крышу  $A_1A_0$  длины 1. Следующий отрезок крыши, который получается подсовыванием снизу третьего кирпича, равен отрезку  $A_2A_1$ , который, как мы выяснили, равен  $\frac{1}{2}$ .

Пусть  $A_3$  — центр масс системы, состоящей из единичной массы в точке  $A$  (центре третьего кирпича) и массы, равной 2, сосредоточенной в точке  $A_2$ , которую мы помещаем на край третьего кирпича ( $AA_2 = 1$ ). Вычислите  $A_2A_3$ .

3) Вы уже обратили внимание на то, что последовательные отрезки крыши — отрезки  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  — имеют длины  $1$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ . Это не случайно. Докажите, что если есть система из двух масс — единичной, расположенной в точке  $A$  и второй, равной  $n-1$  и расположенной в точке  $A_{n-1}$  такой, что  $AA_{n-1} = 1$  (длина половины кирпича), то центр масс новой системы будет расположен в точке  $A_n$  такой, что длина отрезка  $A_{n-1}A_n$  равна  $\frac{1}{n}$ .

## 4. Переход к неравенствам

Мы получили, что при нашем способе построения — подкладывания очередного кирпича под построенную конструкцию — мы на каждом шаге увеличиваем крышу на  $\frac{1}{n}$ . Это означает, что за  $n$  шагов мы можем построить крышу длины  $L_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ . Теперь нашей задачей является оценка числа  $L_n$ .

4) Докажите следующие неравенства:

а)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2};$

в)  $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}.$

б)  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2};$

5) Докажите общее неравенство  $\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^n} > \frac{1}{2}$ . Итак, если мы наберем  $2^n$  дробей, следующих за дробью  $\frac{1}{2^n}$ , то мы получим в сумме число, большее половины. Таких сумм мы можем составить сколько угодно, а значит, и набрать сколько угодно «половин», то есть построить крышу сколь угодно большой длины.

6) Оцените длину крыши с  $1024 = 2^{10}$  кирпичами.

Конечно, сумма  $L_n$  растет очень медленно — чтобы получить большую крышу, надо взять очень много кирпичей. Однако все же число  $L_n$  становится сколь угодно большим. Для более точной оценки роста числа  $L_n$  нам понадобятся средства теории функций, которые мы будем изучать позже.

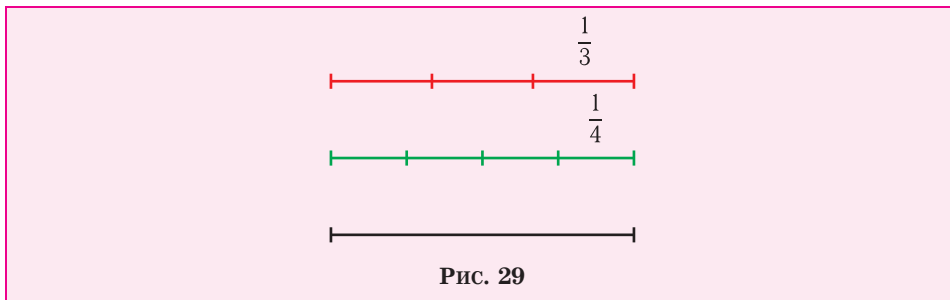
Сумма  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  называется *гармоническим рядом*. То, что его сумма бесконечна — удивительный и замечательный факт.

## Математический кружок

### Занятие 1. Ломание трех палок

Есть три палки одинаковой длины — по 12 единиц каждая, и разных цветов. Играют двое — Андрей и Борис. Они по очереди ломают одну из палок на три части. Андрей, который начинает первым (и будет, следовательно, ломать последнюю палку), стремится к тому, чтобы из всех девяти кусков можно было сложить три треугольника, причем так, чтобы стороны каждого треугольника были окрашены в разные цвета. Борис сопротивляется этому.

1. Андрей первым ходом сломал палку на три равные части, Борис сломал свою палку сначала пополам, а потом одну половину снова пополам (рис. 29). Как должен сломать Андрей третью палку, чтобы выиграть?



2. Андрей первым ходом поступил так же, как и раньше, но Борис сломал свою палку на части 10, 1 и 1. Андрей сначала отломал от третьей палки кусок длины 7, а затем сдался, поняв, что обязательно проиграет. Объясните почему.

3. Первые два хода (4, 4, 4) и (10, 1, 1) были сделаны одинаково. Какому неравенству должна удовлетворять длина куска, отламываемого от третьей палки, чтобы к отрезкам 4 и 10 можно было добавить третий, удовлетворяющий условию игры? Докажите, что при сделанных двух ходах Андрей обязательно проиграет.