

$$15) \begin{cases} x(x+y+z) = 9, \\ y(x+y+z) = 27, \\ z(x+y+z) = 45; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x^3 = \frac{1}{4}yz, \\ y^3 = 4zx, \\ z^3 = 4xy. \end{cases}$$

3. Решите уравнение  $x^4 + (1-x)^4 = 17$ , сведя его к симметричной системе, заменив  $1-x$  через  $y$ : 
$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=17. \end{cases}$$

## Беседа. Обсуждаем понятие корня многочлена

Решая квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$ , мы ищем корень многочлена  $P(x) = x^2 + px + q$ .

**Корнем многочлена** называется число, при подстановке которого многочлен обращается в нуль.

Так, число  $x = 2$  является корнем многочлена  $x^3 - x - 6$ , потому что, подставляя  $x = 2$ , мы получим число (значение многочлена при  $x = 2$ )  $2^3 - 2 - 6 = 0$ , равное нулю.

Подведем итоги того, что нам известно о корнях квадратного трехчлена, то есть многочлена второй степени.

### 1. Корень и разложение на множители.

Если  $x_1$  и  $x_2$  — корни многочлена  $x^2 + px + q$ , то многочлен раскладывается на два линейных множителя:  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ .

### 2. Теорема Виета.

Если  $a$  и  $b$  — корни многочлена  $x^2 + px + q$ , то их сумму и произведение можно выразить через коэффициенты многочлена:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 x_2 = q$ .

### 3. Целые корни многочлена с целыми коэффициентами.

Если коэффициенты  $p$  и  $q$  многочлена  $x^2 + px + q$  — целые числа и целое число  $x_1$  является его корнем, то свободный член  $q$  делится на  $x_1$ , так как по теореме Виета произведение корней равно  $q$ , и второй корень  $x_2 = -p - x_1$  также будет целым.

### 4. Формула для вычисления корней.

Мы знаем формулу для вычисления корней квадратного трехчлена с произвольными коэффициентами. Эта формула содержит квадратный корень из дискриминанта  $D$ , выражающегося через коэффициенты  $p$  и  $q$  ( $D = p^2 - 4q$ ).

Обсудим теперь, как эти свойства обобщаются для произвольного многочлена  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ .

**Корень и разложение на множители.** Если  $x_1$  — корень многочлена  $P$ , то многочлен  $P$  делится на двучлен  $x - x_1$ , то есть  $P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$ .





Этьенн Безу (1739–1783)

Это простое утверждение часто связывают с именем французского математика Э. Безу (1739–1783).

Для доказательства теоремы Безу можно поступить так. Подставим  $x = x_1$  в многочлен, получим число, равное нулю:  $x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1x_1 + a_0 = 0$ , и вычтем этот нуль из многочлена (который при этом, разумеется, не изменится):

$$P(x) = (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) - (x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \dots + a_1x_1 + a_0).$$

Теперь сгруппируем слагаемые и увидим, что каждая группа является разностью одинаковых степеней, которая, как мы знаем, делится на разность оснований:

$$P(x) = (x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \dots + a_1(x - x_1) = (x - x_1) \cdot Q(x).$$

Разумеется, верно и обратное утверждение. **Если многочлен  $P$  делится на двучлен  $x - x_1$ , то  $x = x_1$  является корнем многочлена  $P$ :**

$$P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x) \Rightarrow P(x_1) = (x_1 - x_1) \cdot Q(x_1) = 0.$$

Итак, если  $x = x_1$  — один известный нам корень многочлена  $P$  степени  $n$ , то  $P$  можно разложить на два множителя  $P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$ . При этом множитель  $Q(x)$  является многочленом степени на единицу меньшей, и можно продолжать поиск других корней многочлена  $P$ , решая уравнение  $Q(x) = 0$ .

Если нам это удалось до конца, то мы получим разложение многочлена  $P$  на  $n$  линейных множителей:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Заметим, что среди линейных множителей могут оказаться равные и мы сможем записать  $P$  как произведение степеней различных двучленов. Если множитель  $x - x_i$  встречается в разложении многочлена  $k$  раз, то корень  $x = x_i$  называют **кратным** корнем, а показатель  $k$  — **кратностью** этого корня.

Так, если многочлен  $P$  шестой степени разложился следующим образом:  $P(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x-3)$ , то число 1 является корнем кратности 3, число  $-2$  — корнем кратности 2, а число 3 — корнем кратности 1 (или **простым** корнем).



Если  $a$  — кратный корень многочлена  $Q$ , то многочлен  $Q$  делится на степень двучлена  $(x - a)^k$ , ( $k > 1$ ), при этом число  $k$  — наибольший показатель степени двучлена  $x - a$ , на которую делится многочлен  $Q$ . В случае квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$  при  $D = 0$  можно сказать, что число  $x = -\frac{p}{2}$  является кратным корнем трехчлена, причем его кратность равна двум.

**Обобщенная теорема Виета.** Если мы сумели полностью разложить многочлен  $P$  на линейные множители  $P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ , то перемножая  $n$  скобок и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, мы получим связь между некоторыми симметричными выражениями от корней многочлена и коэффициентами.

При умножении скобок мы получим  $n$  слагаемых, содержащих  $x^{n-1}$ , взяв в одной скобке свободный член (в  $i$ -ой скобке он равен  $-x_i$ ), а в остальных  $x$ , т. е. коэффициент при  $x^{n-1}$  равен сумме  $-x_1 - x_2 - \dots - x_n$ . Сравнивая с коэффициентом многочлена при  $x^{n-1}$ , мы получим первое равенство теоремы Виета:  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}$ .

Аналогично находя коэффициент при  $x^{n-2}$ , мы возьмем  $x$  в  $n - 2$  скобках, а в двух оставшихся перемножим свободные члены. Складывая все такие подобные члены, мы получим сумму всевозможных произведений корней, взятых по два (со знаком плюс, так как множителей два). Получим второе равенство:  $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}$  (заметим, что слева стоит  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  слагаемых). Этот процесс можно продолжать дальше и дойти до свободного члена:  $x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n a_n$ , то есть произведение всех корней равно свободному члену многочлена со знаком  $(-1)^n$  (ведь мы  $n$  раз перемножали корни с минусом, чтобы получить свободный член).

Например, не вычисляя корней многочлена  $x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ , мы можем написать равенства:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 5 \\x_1x_2x_3 &= -2\end{aligned}$$

**Целые корни многочлена с целыми коэффициентами.** Если  $m$  — целый корень многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член многочлена делится на  $m$ . Это обобщение свойства 3 корней квадратного трехчлена легко доказывается, причем можно обойтись без теоремы Виета. Подставим корень  $x = m$  в многочлен, получим равенство  $m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \dots + a_1m + a_0 = 0$ , откуда  $a_0 = -m(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \dots + a_1)$ . Все числа в скобке — целые, поэтому  $a_0$  делится на  $m$ .



**Формула для вычисления корней многочлена через его коэффициенты.** Если для первых трех утверждений для квадратного трехчлена мы легко нашли их обобщения на случай произвольного многочлена, то здесь нас ждет серьезная остановка. Для перехода от формулы корней квадратного уравнения к аналогичной формуле для кубического уравнения человечеству понадобилось более полутора тысяч лет. Точную оценку дать трудно, так как дату открытия способа решения квадратных уравнений назвать невозможно, но, скажем, заведомо это умели делать еще до наступления новой эры, а вот время открытия формулы корней кубического уравнения можно определить достаточно точно — она была опубликована итальянским математиком Д. Кардано в 1545 году.



Джероламо Кардано (1501–1576)



Нильс Абель (1802–1829)

Переход к степени 4 дался легко — те же итальянцы (среди них можно упомянуть имя ученика Кардано — Феррари) быстро свели решение уравнения четвертой степени к решению кубического уравнения. Затем наступила новая остановка, хотя и не такая длинная, но гораздо более драматичная. После почти трехсот лет поисков формулы корней уравнения пятой степени было доказано, что такой формулы просто не существует. Это замечательное открытие связано с именами трех математиков, каждый из которых прожил короткую, но очень яркую жизнь, — норвежца Абеля (1802–1829), француза Галуа (1811–1832) и итальянца Руффини (1765–1822).

Как понимать эти слова «формулы не существует», почему доказательство отсутствия, несуществования чего-то было действительно замечательным открытием — эти вопросы требуют более подробного разговора, который можно найти в популярных книгах по математике, посвященных ее истории.



Эварист Галуа (1811–1832)



Пауло Руффини (1765–1822)

### Примеры

1. Решить уравнение  $x^3 - x^2 - 7x + 3 = 0$ .

Проверим, нет ли у данного уравнения целых корней. Для этого надо подставить в его левую часть делители свободного члена (не забывая брать их с двумя знаками), то есть числа  $\pm 1, \pm 3$ . Убеждаемся, что  $x = 3$  — целый корень этого многочлена:

$$3^3 - 3^2 - 7 \cdot 3 + 3 = 27 - 9 - 21 + 3 = 0.$$

По теореме Безу многочлен должен делиться на  $x - 3$  (мы, конечно, и раньше использовали этот факт, не зная, что он так называется). Можно поделить многочлен на  $x - 3$  столбиком (уголком), а можно воспользоваться группировкой:  $x^3 - x^2 - 7x + 3 = x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - x + 3 = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)$ . Квадратное уравнение  $x^2 + 2x - 1 = 0$  целых корней не имеет, и мы находим его корни по общей формуле:  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ .

*Ответ:*  $x_1 = 3, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

2. Найти сумму квадратов корней многочлена  $x^3 - x^2 - 7x + 3$ .

Для решения этой задачи нам знать корни не обязательно (хотя мы сумели их найти). Воспользуемся теоремой Виета.

$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ . По теореме Виета,  $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7$ . Получаем  $S = 1 + 2 \cdot 7 = 15$ .

Ради любопытства сделаем проверку, используя ответ предыдущей задачи:  $x_1 = 3, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2 + (-1 - \sqrt{2})^2 + (-1 + \sqrt{2})^2 = 9 + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2 - 2\sqrt{2} = 9 + 3 + 3 = 15$ .

*Ответ:*  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ .