

2) Определите пары дробей  $A$  и  $B$ , образующих тождества вида  $A = B$ .

$A \backslash B$	$2 + \frac{4b^2}{a^2 - b^2}$	$1 + \frac{4ab}{a^2 - 2ab + b^2}$	$2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2$	$2 - \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2}$
$\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$				
$\frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2}$				
$\frac{a + b}{a - b} + \frac{a - b}{a + b}$				
$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$				

## Сюжеты и проекты

### Сюжет 1. Работаем глазами



1. Ответьте, не проводя вычислений, что получится, если упростить выражение  $A$ .

$$A = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a + b}}{(a + b)^2(a^3 - b^3)}$$

а) На какие множители можно разложить числитель и знаменатель дроби  $A$ ?

б) Для каждого множителя укажите, будет ли он входить в числитель или знаменатель (после сокращения дроби) и в какой степени?

в) Запишите результат проделанных устно преобразований.

$$2) A = \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} + \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

а) Можно ли сократить дроби до их сложения?

б) Каков общий знаменатель дробей?

в) Какой получится числитель суммы дробей?

г) Запишите результат проделанных устно преобразований.

2. Для выражения  $A = \frac{x^2 + y^2}{x - y} : \left(\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x + y}\right)$  выполните задания:

1) Подсчитайте устно числитель дроби, который получится после вычитания дробей в скобках.

2) Что произойдет со множителем  $x^2 + y^2$  после выполнения деления?

3) Запишите результат проделанных устно преобразований.

3. Для выражения  $A = \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{1}{x^2 - x}\right) : \left(x - \frac{x^2}{x - 1}\right)$  выполните задания:

1) На какой множитель надо домножить числитель и знаменатель первой дроби в первой скобке, чтобы привести ее к общему знаменателю со второй дробью в этой же скобке?

2) Можно ли сократить дробь, получающуюся после сложения в первой скобке?

- 3) Какой получится числитель после сложения во второй скобке?
4. Для дробей  $A = \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2}$  и  $B = \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$  выполните задания:
- 1) Что общего в структуре выражений  $A$  и  $B$ ?
  - 2) Приведите к общему знаменателю дроби, стоящие в числителе и знаменателе дроби  $B$ . Что можно о них сказать?
  - 3) Квадраты каких выражений получатся в числителе и знаменателе дроби  $B$  после сокращения?
  - 4) Вернемся к выражению  $A$ . Что в нем соответствует  $x$  и  $y$  в выражении  $B$ ? Вычислите  $x + y$  и  $x - y$ , подставив вместо  $x$  и  $y$  соответствующие выражения из  $A$ .
  - 5) Подставьте устно полученные выражения для  $x + y$  и  $x - y$  в ответ для  $B$  и найдите ответ для выражения  $A$ .



## Сюжет 2. Решаем задачи на делимость

1. При каких натуральных значениях  $n$  значение дроби будет целым числом?
  - 1)  $\frac{6}{n}$ ;
  - 2)  $\frac{2n}{n-3}$ ;
  - 3)  $\frac{n^2}{n-2}$ ;
  - 4)  $\frac{12}{n^2-4}$ ;
  - 5)  $\frac{2n^2+3n+5}{n+1}$ .
2. Исследуем выражение  $x^n + \frac{1}{x^n}$ .
  - 1) Докажите, что если число  $x + \frac{1}{x}$  — целое, то числа  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  и  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  также являются целыми.
  - 2) Известно, что  $x + \frac{1}{x} = 5$ . Вычислите  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  и  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ .



## Проект 1. Условные тождества

1. Постановка задачи  
Рассмотрим задачу.

Пусть  $a$  и  $b$  — катеты прямоугольного треугольника,  $c$  — гипотенуза. Доказать, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  связаны соотношением  $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} = c^4 - a^2b^2$ .

В прямоугольном треугольнике величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не являются независимыми — они связаны соотношением  $a^2 + b^2 = c^2$  (теорема Пифагора, которую вы будете изучать позже).

Поэтому задачу можно сформулировать так:

Доказать тождество  $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} = c^4 - a^2b^2$ , если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны условием  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Такого рода задачи называют условными тождествами.

*Цель работы:* научиться доказывать условные тождества.

2. Обдумывание условия

Есть два способа доказательства условных тождеств.