



## Сюжет 2. Арифметические прогрессии и тождества

- 1) Пусть числа  $a, b, c$  составляют арифметическую прогрессию. Докажите тождества:
  - а)  $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$ ;
  - б)  $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$ ;
  - в)  $\frac{2}{9}(a + b + c)^3 = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$ .
- 2) Числа  $a^2, b^2, c^2$  образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа  $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$  также образуют арифметическую прогрессию.
- 3)  $a_k, a_l, a_m$  — члены арифметической прогрессии с номерами  $k, l, m$  соответственно. Докажите тождество  $(l-m)a_k + (m-k)a_l + (k-l)a_m = 0$ .
- 4) Даны три многочлена  $f_1 = x^2 - 2x - 1, f_2 = x^2 + 1, f_3 = x^2 + 2x - 1$ . Докажите, что их квадраты образуют арифметическую прогрессию.
- 5) Могут ли числа  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$  быть членами одной арифметической прогрессии?



## Сюжет 3. Спектр числа $\sqrt{2}$

- 1) С помощью калькулятора составьте последовательность целых частей чисел  $[\sqrt{2}], [2\sqrt{2}], [3\sqrt{2}], \dots, [20\sqrt{2}]$ . Последовательность  $[x], [2x], [3x], \dots$  называют *спектром* числа  $x$ .
- 2) Составьте первые двадцать членов спектра числа  $2 + \sqrt{2}$ .
- 3) Проверьте, что каждое целое число (до 25) входит в один из найденных спектров и ни одно из них не встречается в обоих спектрах.
- 4) Докажите, что  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1$ .
- 5) Докажите, что  $\left\{ \frac{n}{\sqrt{2}} \right\} + \left\{ \frac{n}{2 + \sqrt{2}} \right\} = 1$ .
- 6) Докажите, что  $\left[ \frac{n}{\sqrt{2}} \right] + \left[ \frac{n}{2 + \sqrt{2}} \right] = n - 1$ , где  $n$  — целое число.
- 7) Сравните количество членов в последовательностях  $[\sqrt{2}], [2\sqrt{2}], \dots$  и  $[2 + \sqrt{2}], [2(2 + \sqrt{2})], \dots$  до тех пор, пока члены этих последовательностей не превосходят чисел  $\left[ \frac{20}{\sqrt{2}} \right]$  и  $\left[ \frac{20}{2 + \sqrt{2}} \right]$  соответственно.



## Сюжет 4. Из одной геометрической прогрессии строим новые

Дана геометрическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots$  со знаменателем  $q_0$ . Будут ли геометрическими прогрессиями следующие последовательности? Если ответ положителен, найдите знаменатель новой прогрессии (1–9):

- 1)  $a_2, a_4, a_6, \dots$ ;
- 2)  $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$ ;

- 3)  $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ ;
- 4)  $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \dots$ ;
- 5)  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_n = 2a_n$ ;
- 6)  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_n = a_n^2$ ;
- 7)  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_n = a_{n+1} + a_n$ ;
- 8)  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_n = ka_{n+1} + la_n$ ;
- 9)  $b_1, b_2, \dots$ , где  $b_n = a_{n+1} \cdot a_n$ .

## Сюжет 5. Геометрические прогрессии и тождества

Пусть числа  $a, b, c$  и  $d$  образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождества.

- 1)  $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ .
- 2)  $(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$ .
- 3) Пусть числа  $a, b, c$  образуют геометрическую прогрессию. Докажите тождество  $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$ .
- 4) Существует ли прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию?
- 5) Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами одной геометрической прогрессии?
- 6) В геометрической прогрессии  $a_{m+n} = x$ ,  $a_{m-n} = y$ . Докажите, что  $a_m = \sqrt{xy}$ .

Проекты по этой главе предназначены для коллективной работы. По одной теме предлагаются разные подходы, которые можно использовать параллельно.

## Проект 1. Прогрессии в геометрии

<http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 9 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 9 класс:

— глава 10, пункт 1 «Числовые последовательности», 2–5, 7, 8.

**Цель работы:** познакомиться с последовательностями, возникающими при геометрических построениях, и научиться переносить в геометрию новые работы с прогрессиями.

Выберите геометрический объект из следующего списка.

1. Треугольник.
2. Квадрат.
3. Круг.

