

имеют место следующие соотношения:

$$m_{k+1}n_k - m_k n_{k+1} = \pm 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{m_k}{n_k} \right| = \frac{1}{n_{k+1}n_k}.$$

г) Последовательность подходящих дробей с четными номерами образует последовательность приближений к исходному числу с недостатком, а с нечетными номерами — с избытком.

д) Проверьте утверждения в) и г) для первых десяти подходящих дробей разложения чисел $\sqrt{2}$ и $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ в непрерывные дроби.

е) Подсчитайте восемь первых подходящих дробей

$$\pi_n \quad (\pi_0 = 3; \pi_1 = \frac{22}{7}; \dots; \pi_7)$$

разложения числа π в непрерывную дробь и определите, сколько верных знаков дают эти дроби.

$$\pi = 3,141592653589793\dots;$$

$$\pi = [3; 7, 1, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \dots].$$

Теория объясняет большую точность уже четвертого приближения тем, что встретившееся в разложении число 292 неожиданно велико. По аналогичной причине точность затем растет медленно.

Математический кружок

Занятие 3. Геометрические места точек

Многие прямые и кривые на плоскости можно задать как множества точек (геометрические места точек — ГМТ) с помощью расстояний. Записывая определения этих геометрических мест с помощью формул, мы получим их уравнения.

Выведите уравнения следующих ГМТ, не делая преобразований полученных уравнений. Эти ГМТ изображены на рис. 49 и для ознакомления записаны их уравнения после преобразований.

1) ГМ точек $M(x; y)$, равноудаленных от двух точек плоскости $A_1(a_1; b_1)$ и $A_2(a_2; b_2)$, — прямая, перпендикулярная отрезку A_1A_2 и проходящая через его середину.

2) ГМ точек $M(x; y)$, удаленных на расстояние R от точки $O'(a; b)$, — окружность радиуса R с центром O' .

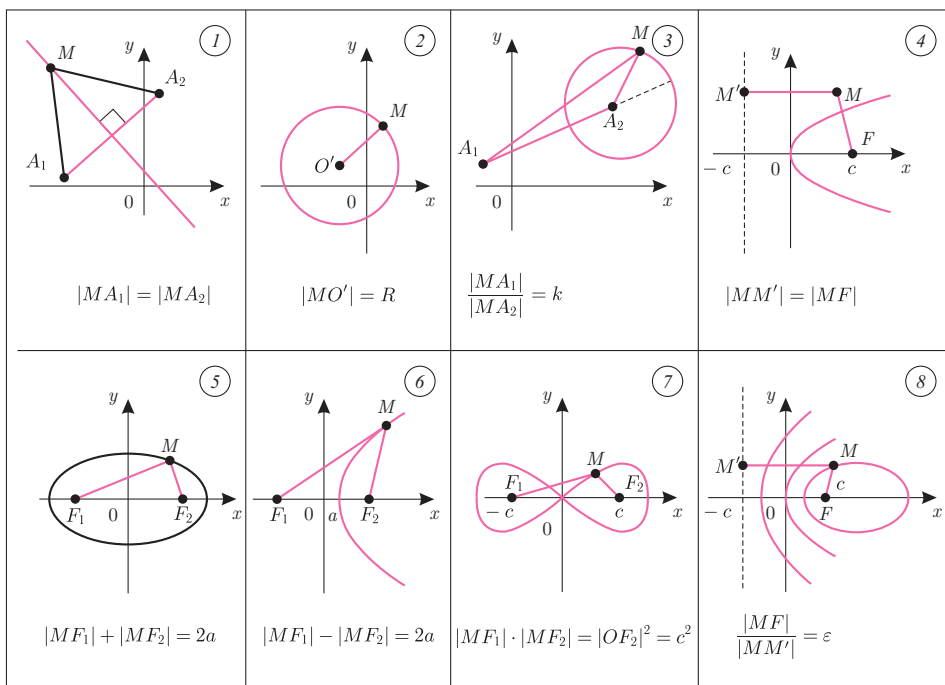


Рис. 49

3) ГМ точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых до точек $A_1(a_1; b_1)$ и $A_2(a_2; b_2)$ постоянно и равно k ($k \neq 1$) — *окружность Аполлония*.

4) ГМ точек $M(x; y)$, равноудаленных от точки $F(0; \frac{p}{2})$ на оси y и прямой $y = -\frac{p}{2}$, параллельной оси x , — парабола, проходящая через начало координат.

5) ГМ точек $M(x; y)$, сумма расстояний которых до двух точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ постоянна и равна $2a$, — эллипс с *фокусами* F_1 и F_2 .

6) ГМ точек $M(x; y)$, разность расстояний которых до двух точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ постоянна и равна $2a$, — одна ветвь гиперболы с *фокусами* F_1 и F_2 .

7) ГМ точек $M(x; y)$, произведение расстояний которых до двух точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ постоянно и равно c^2 , — *лемниската* Бернулли.

8) ГМ точек $M(x; y)$, отношение расстояний которых до точки $F(c; 0)$ и до прямой $x = -c$ ($c > 0$) постоянно, это отношение обозначается греческой буквой ε (эпсилон). Точку F называют фокусом этой кривой, а число ε — эксцентриситетом. Если $\varepsilon < 1$, то получается эллипс, если $\varepsilon > 1$, — гипербола (одна ее ветвь), при $\varepsilon = 1$ получается парабола.



Плутон и его спутник Харон

Орбиты различных небесных тел, движущихся под действием притяжения к Солнцу, представляют собой указанные кривые, в фокусе которых находится Солнце. Эти кривые имеют разные эксцентриситеты. Орбиты планет — эллипсы. Так, Земля имеет самый маленький эксцентриситет $\varepsilon = 0,017$ (ее орбита наименее вытянута и ближе других к окружности), а Плутон имеет самый большой эксцентриситет $\varepsilon = 0,125$ (его орбита наиболее вытянута). Некоторые кометы имеют сильно вытянутые эллиптические орбиты (и возвращаются к Солнцу через большой временной период), а некоторые движутся по гиперболам и появляются вблизи Солнца лишь однажды (на рисунке справа комета Хейли-Бонна).

Определите кривые по их уравнениям.



Уравнения	Прямая	Окруж- ность	Парабо- ла	Эллипс	Гипер- бола
$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2$					
$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$					
$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 1$					
$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$					
$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1 $					

Занятие 4. Неравенства с радикалами

1. Докажите неравенство $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ ($x \geq -1$).

2. Докажите неравенства для натурального числа n :

1) $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$;

2) $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

3. Выпишите неравенства 1) и 2) предыдущего пункта для $n = 1, 2, \dots, 4$, сложите их и получите оценку сверху и снизу для суммы

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}.$$

4. Докажите неравенство

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

5. Найдите какое-нибудь n , для которого сумма

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

была бы больше ста.

6. Докажите неравенства:

1) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$;

2) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[5]{6}$.

7. Предложите обобщение неравенств 1 и 2 предыдущего пункта.