

Если $f > 0$, то запишем $f = R^2$ и получим уравнение окружности с центром $O' \left(-\frac{c}{2a}; -\frac{d}{2a} \right)$ и радиусом $R = \sqrt{f}$.

Если $f = 0$, то получим точку $O' \left(-\frac{c}{2a}; -\frac{d}{2a} \right)$ — окружность «нулевого радиуса».

Если $f < 0$, то никаких точек нет. В шутку говорят, что это окружность «мнимого радиуса» $R = \sqrt{f}$.

То, что при невыполнении условий $a = b \neq 0$, не будет получаться окружность, требует достаточно длинного разбора. Отметим кратко его результаты.

1. $a = b = 0$ — получится прямая (если хотя бы один из коэффициентов при x или y отличен от нуля).

2. Один из коэффициентов a или b равен нулю, другой отличен от нуля — получится парабола (рис. 39 а).

3. Оба коэффициента a и b отличны от нуля, но различны. Если они одного знака, то будет получаться эллипс (рис. 39, б), а если разных — то гипербола (рис. 39, в).

Параболы, эллипсы и гиперболы при исключительных значениях коэффициентов c , d и e могут «вырождаться», т.е. превращаться в точку, отрезок, пару параллельных или пересекающихся прямых.

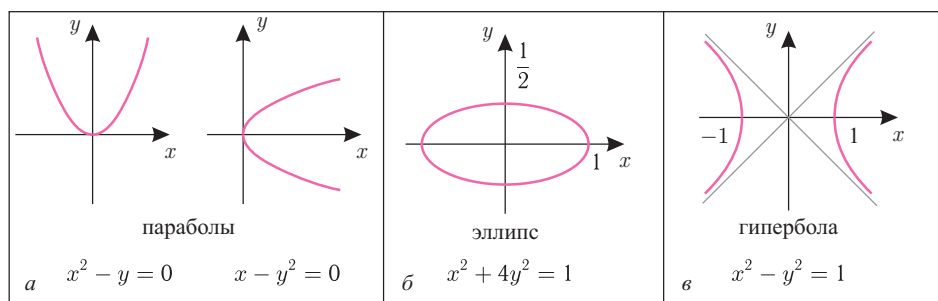


Рис. 39



Продолжаем изучение средних величин

Во всех встречавшихся у нас задачах на движение мы всегда считали скорость движения постоянной. Однако, сидя в кабине автомобиля и глядя на его спидометр, вы всегда заметите, что скорость движения автомобиля не остается постоянной — она часто меняется. В то же время нам понятен смысл фразы: автомобиль прошел расстояние со средней скоростью 60 км/ч. Она означает, что если автомобиль прошел s км за t часов, то его средняя скорость v , вычисленная по формуле $v = \frac{s}{t}$, равна 60 км/ч.

Если один отрезок пути длиной s_1 автомобиль двигался время t_1 с постоянной скоростью v_1 , а другой отрезок s_2 он прошел за время t_2 с постоянной скоростью v_2 , то можно определить его среднюю скорость v

на двух участках. Для этого надо поделить суммарный путь на суммарное время: $v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}$.

В каком смысле можно теперь говорить о скорости v как среднем значении скоростей v_1 и v_2 ?

1. Если время движения на каждом участке одно и то же, т.е. если $t_1 = t_2$, то $v = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_1} = \frac{t_1(v_1 + v_2)}{2t_1} = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

В этом случае средняя скорость равна среднему арифметическому скоростей на отдельных участках.

2. Если длины участков равны, то есть если $s_1 = s_2$, то $v = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_1}{v_2}} = \frac{2s_1}{s_1 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$.

Мы получили новое среднее чисел v_1 и v_2 .

Оно не совпадает со средним арифметическим. Оно называется **средним гармоническим**. Из-за этого часто возникают ошибки в задачах на движение. Например, говорится, что по течению реки пароход шел со скоростью 20 км/ч, а против течения – со скоростью 10 км/ч. Какова средняя скорость парохода на всем пути? Собственная скорость парохода действительно будет равна среднему арифметическому скоростей, т.е. 15 км/ч, но средняя скорость (так как пути по течению и против течения совпадают) будет равна среднему гармоническому скоростей, то есть $v = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{10}} = \frac{40}{3} \approx 13,33$ км/ч.

Итак, для двух положительных чисел a и b мы можем ввести их среднее арифметическое $A = \frac{a+b}{2}$ и среднее гармоническое $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Мы уже встречали среднее геометрическое этих чисел, то есть число $G = \sqrt{ab}$. Его геометрический смысл таков: G — это длина стороны квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со сторонами a и b .

Есть еще одно среднее значение двух чисел, имеющее геометрический смысл, которое называют их **средним квадратичным**. Оно определяется так: $Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Геометрически среднее квадратичное — это длина стороны квадрата, диагональ которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b . Действительно, длина гипотенузы равна $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а сторона квадрата с диагональю c равна $\frac{c}{\sqrt{2}}$, откуда $Q = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Итак, для двух положительных чисел a и b можно определить несколько различных средних, которые полезны в разных задачах из физики или геометрии.



Замечательно то, что между всеми четырьмя определенными нами средними значениями всегда выполняется цепочка неравенств: $H \leq G \leq A \leq Q$, т.е.

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Все они доказываются с помощью уже известного нам неравенства о среднем арифметическом, которое мы записывали в виде $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ или в виде $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.



Комментарий. Неравенствам $H \leq G \leq A \leq Q$ можно придать физический или геометрический смысл. Почему, например, среднее гармоническое не больше среднего арифметического? Вернемся к задаче о движении теплохода. Пусть теплоход по тому же пути (вперед и назад) по стоячей воде. Его собственная скорость равна среднему арифметическому скоростей по течению и против течения. С этой скоростью он весь путь в стоячей воде пройдет быстрее, чем если бы в одну сторону он шел по течению, а в другую – против (подумайте, почему). Это и означает, что его средняя скорость в стоячей воде больше средней скорости при движении по реке вперед и назад на одно и то же расстояние.

Полезно заметить, что неравенство между двумя средними превращается в равенство в том и только в том случае, когда числа a и b равны между собой.

Три средних для двух положительных чисел a и b можно изобразить геометрически (рис. 40), откуда станут ясны неравенства между ними.

$$G = \sqrt{ab}, \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad H = G \cdot \frac{G}{r} = \frac{2ab}{a+b}, \quad \text{так как} \quad \frac{H}{G} = \frac{G}{r}.$$

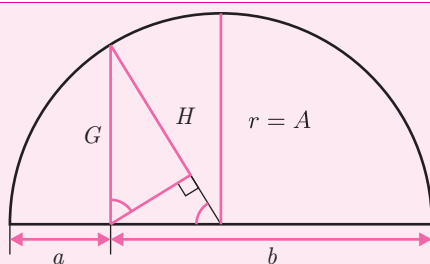
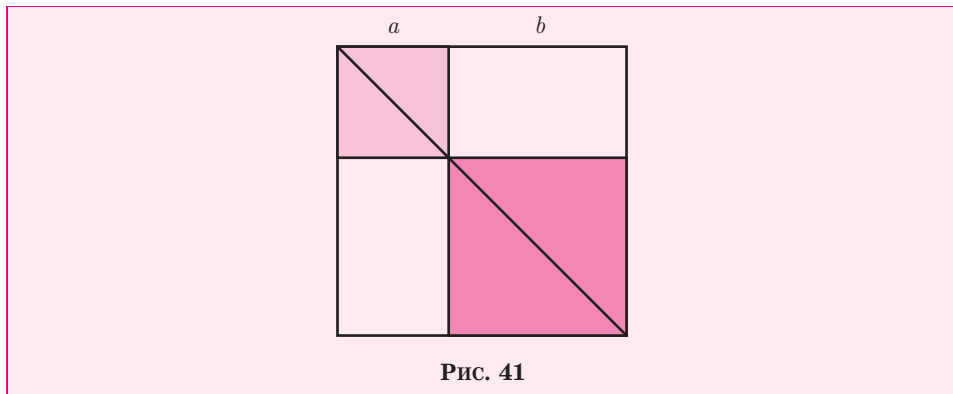


Рис. 40

Неравенству $A \leq Q$ тоже можно придать простой геометрический смысл, переписав его так:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2+b^2.$$

Последнее неравенство означает, что сумма площадей двух закрашенных квадратиков не меньше половины площади всего квадрата со стороной $a+b$ (рис. 41).



Введенные нами средние величины для двух чисел можно определить и для произвольных n положительных чисел:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \quad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \quad Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Цепочка неравенств между ними при этом сохраняется:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n,$$

т.е. среднее квадратичное среди них — самое большое, а среднее гармоническое — самое маленькое.

Интернет-ресурсы: <http://school-collection.edu.ru>, каталог — для учителя — алгебра — 8 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 8 класс

- глава 6, пункт 2 «Неравенства с квадратными корнями», 1–9,
- глава 6, пункт 3 «Расстояние в координатах», 1–3,
- глава 6, задачник, рабочая тетрадь.