

5. Проверка

Проведем проверку вместе. Если число n имеет в десятичной записи 3 цифры, то это число меньше, чем $1000 = 10^3$.

Аналогично число, имеющее в двоичной системе k цифр, меньше, чем 2^k .

В десятичной записи число

от 1 до $9 = 10 - 1$ имеет одну цифру;

от 10 до $99 = 10^2 - 1$ имеет две цифры;

от 10^2 до $999 = 10^3 - 1$ имеет три цифры и т.д.

Аналогично в двоичной системе число от 2^{k-1} до $2^k - 1$ имеет в записи k цифр.

Теперь, найдите самостоятельно:

8. Сколько цифр в двоичной системе счисления будут иметь следующие числа, записанные в десятичной системе:

35;

99;

500;

1000.

9. Сколько цифр в десятичной системе счисления будут иметь следующие числа, записанные в двоичной системе:

111011;

1000011111.

6. Заключительные вопросы

10. Какое наименьшее число гирек надо изготовить, чтобы на коромысловых весах можно было бы взвесить любое число граммов от 1 до 1000 (гири можно класть только на одну чашку)?

11. Как изменится ответ на предыдущий вопрос, если гири можно класть на обе чашки?

Интернет-ресурсы: <http://school-collection.edu.ru>, каталог — для учителя — алгебра — 7 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 7 класс

– глава 3, пункт 5 «Преобразование рациональных выражений», 2, 9, 14.

www



Проект 3. Китайская игра Янь

1. Постановка задачи

Двое играют в такую игру.

Выбирается одночлен с двумя буквами a и b и коэффициентом 1, например, $a^{10}b^8$. Играющий своим ходом делит его на одночлен такого вида: a^k , b^k , или $(ab)^k$. Пропускать ход (то есть ни на что не делить) нельзя. Выигрывает тот, кто получит одночлен 1.

Цель игры

– разработать правильную стратегию для каждого из играющих в зависимости от начального положения;

– найти способ, как узнать для любого начального положения, кто должен выиграть при правильной стратегии — первый или второй из играющих.

2. Обдумывание условия

Пусть исходный одночлен имеет вид ab^2 . Эта ситуация является «матовой», проигрышной для первого участника.

Это очевидно, потому что любой следующий ход будет последним ходом этого участника: из позиции ab^2 можно перейти к следующим положениям.

Ход	Положение после хода
a	b^2
b	ab
b^2	a
ab	b

Все они являются выигрышными для следующего участника.

Легко сообразить, что должны быть и другие проигрышные позиции, и стратегия очередного игрока состоит в том, чтобы своим ходом перевести игру в позицию, проигрышную для соперника.

3. Численный эксперимент

Работу можно выполнять вдвоем, но можно и одному играть за двоих.

1. Выберите небольшие (до 20) показатели степени у для a и b и сыграйте две партии, оформляя, как в шахматах, протокол игры. В протокол вписываются: исходное положение, имена участников, ход участника (на какой одночлен он делит) и положение после этого хода.

Вот так может выглядеть протокол.

№	Алеша		Наташа	
	Ход	Положение после хода	Ход	Положение после хода
1				
2				
3				
4				
...				

4. Анализ эксперимента

1) Посмотрите внимательно на протоколы двух партий.

Партия I

$$a^{20}b^{15}$$

№	Алеша		Наташа	
	Ход	Положение после хода	Ход	Положение после хода
1	b^3	$a^{20}b^{12}$	a^3b^3	$a^{17}b^9$
2	a^2	$a^{15}b^9$	a^4	$a^{11}b^9$
3	a^6b^6	a^5b^3	b	a^5b^2
4	a^4	ab^2		сдалась

Партия II

$$a^{23}b^{14}$$

№	Алеша		Наташа	
	Ход	Положение после хода	Ход	Положение после хода
1	a^5	$a^{18}b^{14}$	$(ab)^8$	$a^{10}b^6$
2	a	a^9b^6	a^2b^2	a^7b^4
3	ab	a^6b^3	b	a^5b^3
4	b	a^5b^2	a^4	ab^2
5		сдался		

Алеша в первой партии и Наташа во второй играли «правильно»: все позиции, в которые они ставили партнера, были проигрышными.

2) Выпишите проигрышные позиции еще раз, начиная с ab^2 , a^3b^5 .

Заметьте, что симметричные позиции (a^3b^5 и a^5b^3) являются по существу одинаковыми и надо выписывать только одну из них.

3) Обратите внимание на следующее:

а) каждый показатель степени 1, 2, 3 и т.д. присутствует в списке проигрышных позиций не более одного раза;

б) некоторые показатели отсутствуют.

4) Поиграйте с партнером и убедитесь в том, что если ваша позиция не является проигрышной, то вы всегда можете своим ходом перевести ее в проигрышную.

Составьте разности показателей степеней a и b в проигрышных позициях (например, для позиции ab^2 эта разность равна $2 - 1 = 1$).

5) Убедитесь в том, что каждая разность встречается в проигрышных позициях не более одного раза.

Придумайте проигрышную пару для первой из отсутствующих разностей.

5. Доказательство утверждений 3)–5)

Выпишите снова последовательность проигрышных позиций в порядке возрастания разностей показателей. Ставьте для определенности показатели для a меньше, чем для b . Убедитесь в том, что все показатели присутствуют по одному разу.

Делаем вместе

1) Выпишем показатели степеней из 1, 2, 5 и 13-й строк: 1, 2, 3, 5, 8, 13.

Узнаете ли вы эту последовательность чисел?

Напоминаем, что это последовательность чисел Фибоначчи, в которой каждый член (начиная с третьего) равен сумме двух предыдущих.

2) Предлагаем следующее правило образования пар чисел (k, l) , для которых позиции $a^k b^l$ являются проигрышными:

а) составляются пары из последовательности чисел Фибоначчи: (1; 2), (3; 5), (8; 13), ...;

б) составляются разности между числами одной пары (это тоже числа Фибоначчи: 1, 2, 5, 13, ...);

в) найденные пары вписываются в строчки с полученными разностями.

6. Заключительные вопросы

Теперь придумайте сами, как заполняются остальные строчки. Подскажем, что они должны строиться последовательно с помощью предыдущих строчек.

Заполните таблицу проигрышных ситуаций с 34 строчками.

Теперь вы полностью научились играть в замечательную игру, придуманную китайцами много веков назад!

Интернет-ресурсы: <http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 7 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 7 класс

– глава 3, пункт 3 «Приведение к общему знаменателю», 1, 2, 3.

Математический кружок

Занятие 1. Простые и составные числа

Обзор теории (речь идет о натуральных числах)

1. *Простое число* — это число $p > 1$, у которого нет других делителей, кроме 1 и p .