



9. Найдите все натуральные числа n , удовлетворяющие неравенствам:

1) $2n < 7$; 2) $100 - 7n > 70$; 3) $n + \frac{1}{n} < 5,5$; 4) $n - \frac{1}{n} < 4,5$.



10. Ручка стоила 40 рублей. Ее цену снизили не менее чем на 25 %. Укажите в виде неравенства, сколько ручек можно будет купить на 400 рублей после снижения цены.

11. Для числа x выполняется данное неравенство. Какие из следующих неравенств являются его следствиями? Укажите, какие правила действий с неравенствами используются для получения этих следствий.

A. $x > 2$;	7) $1 - 3x < -5$;	Б. $x \leq 2$;	7) $-3x \geq -6$;
1) $x + 5 > 7$;	8) $x^2 + x > 6$;	1) $x < 2$;	8) $7 - 3x \geq 1$;
2) $x > 1$;	9) $-\frac{2}{x} > -1$;	2) $x - 1 \leq 1$;	9) $-\frac{2}{x} \leq -1$;
3) $3x > 6$;	10) $\frac{1}{x-1} < 1$;	3) $3x < 7$;	10) $(x-3)^2 \geq 1$;
4) $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$;	11) $\frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{3}$;	4) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$;	11) $(x-3)^3 \geq 1$;
5) $x^2 > 2$;	12) $(x-1)^2 > 1$.	5) $x^2 \leq 4$;	12) $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{4}$.
6) $-x < 0$;		6) $-x < 0$;	

§ 3 Доказательство неравенств

Доказываем главную теорему

Многие неравенства выполняются при любых допустимых значениях входящих в них букв. В этом смысле они напоминают тождества.

Простейшим неравенством такого вида является неравенство $a^2 \geq 0$

Действительно, квадрат любого числа является положительным числом или нулем, причем последнее выполняется только для числа, равного нулю. Доказательство многих других неравенств, которые совсем не так очевидны, состоит в том, что их приводят равносильными переходами к какому-либо очевидному.

Докажем важное неравенство, справедливое при любых числах a и b :



Теорема о среднем арифметическом.

Для любых двух чисел a и b справедливо неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

Число $\frac{a+b}{2}$ называют средним арифметическим двух чисел a и b . Неравенство утверждает, что квадрат среднего арифметического двух чисел всегда больше или равен их произведению.

Доказательство

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab &\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство всегда верно.

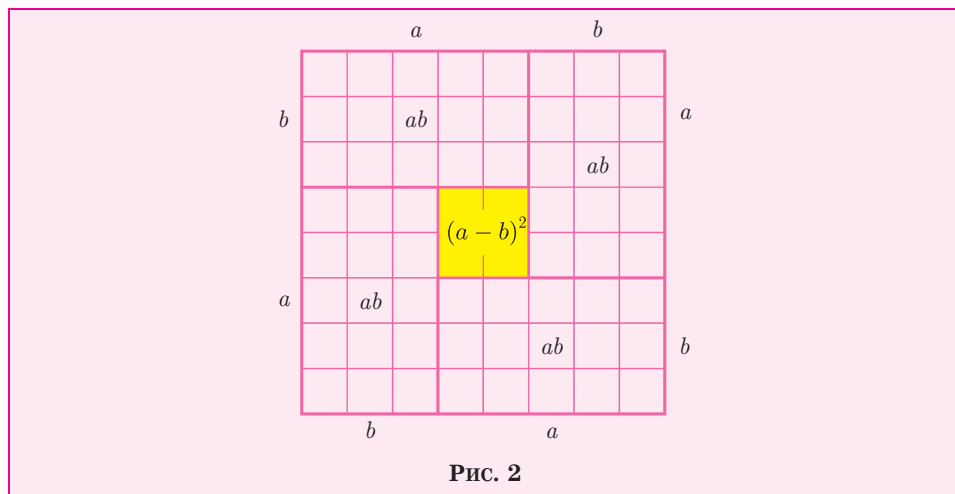
Так как все переходы можно делать в обе стороны, то из последнего неравенства вытекает первое. Доказательство закончено.

Более того, так как $(a-b)^2 = 0$ при $a = b$ и $(a-b)^2 > 0$, если $a \neq b$, то можно добавить, что доказанное неравенство превращается в верное равенство тогда и только тогда, когда числа a и b равны.

Неравенство для среднего арифметического двух чисел можно переписать в виде $(a+b)^2 \geq 4ab$ и тогда оно приобретает простой геометрический смысл: площадь квадрата со стороной $a+b$ всегда больше или равна учетверенной площади прямоугольника со сторонами a и b .

Аналогичными рассуждениями можно доказать много других полезных неравенств.

Комментарий. Неравенство $(a+b)^2 \geq 4ab$ можно доказать геометрически. Рассмотрим квадрат со стороной $a+b$. Пусть $a \geq b$. Отложим на сторонах квадрата от всех вершин отрезок b и проведем прямые, параллельные сторонам (рис. 2).



Квадрат разбился на 4 прямоугольника со сторонами $a \times b$, в центре остался квадрат со стороной $(a-b)$.

Теперь ясно, что $(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 \geq 4ab$.

Неравенство превращается в равенство в том и только в том случае, если центральный квадратик исчезнет, т.е. когда $a = b$ (рис. 3).

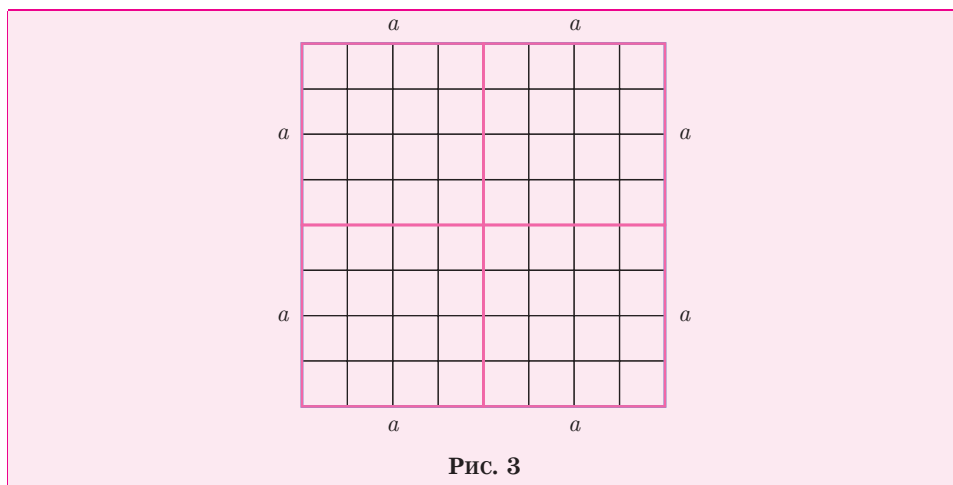


Рис. 3



Выводим следствия

1. Для любого числа $a > 0$ выполняется неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$.



Доказательство

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0)$$



$$a^2 + 1 \geq 2a \quad (\text{умножили неравенство на положительное число } a)$$



$$a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad (\text{перенесли } 2a \text{ из одной части в другую})$$



$$(a - 1)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство верно при любом a , причем обращается в нуль лишь при $a = 1$.

Доказанное неравенство можно сформулировать так: **сумма взаимно обратных положительных чисел всегда больше или равна двум, причем равенство достигается лишь тогда, когда каждое из этих чисел равно единице.**

Доказанное неравенство можно получить как следствие теоремы о среднем арифметическом. Напишем эту теорему для чисел a и $\frac{1}{a}$:

$$\left(\frac{a + \frac{1}{a}}{2}\right)^2 \geq a \cdot \frac{1}{a} \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

2. Для любых чисел a и b выполняется неравенство

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно верно, причем оно обращается в равенство лишь при $a = b$.

Это неравенство также можно вывести из неравенства о среднем арифметическом. Прибавим к двум частям неравенства $a^2 + b^2 \geq 2ab$ выражение $a^2 + b^2$. Получим

$$2(a^2 + b^2) \geq 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2.$$

Неравенства часто помогают решать задачи, в которых надо среди значений алгебраического выражения указать самое большое или самое маленькое. Например, неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$ означает, что наименьшим значением выражения $a + \frac{1}{a}$ при положительных значениях a является число 2, причем оно получается при $a = 1$.

Теорема о среднем арифметическом позволяет доказать следующие два утверждения, известные с глубокой древности.

1) Из всех прямоугольников данного периметра *наибольшую площадь* имеет квадрат.

Обозначим стороны прямоугольника через a и b . Нам дано, что $2(a + b) = p$, где p — постоянное число (периметр). Площадь прямоугольника равна $S = ab$. Применим теорему:

$$ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2.$$

