



6. Решите неравенства:

1)  $\frac{1}{x} \leq 2$ ;

2)  $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{3}$ ;

3)  $\frac{x+3}{2x-1} \leq 1$ ;

4)  $\frac{2}{x^2+x} \geq 1$ ;

5)  $\frac{x+2}{4-x} < \frac{x+4}{3}$ ;

6)  $\frac{2x+3}{3x+2} \geq \frac{4x+1}{x+4}$ ;

7)  $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \leq \frac{3}{x}$ ;

8)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{4(x-2)} \geq 0$ ;

9)  $\frac{5x-24}{x+1} + \frac{6x-5}{x+4} \leq 11$ ;

10)  $\frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x+5}{x-6}$ ;

11)  $\frac{5-x}{2x+5} \geq \frac{2x+4}{1-4x}$ ;

12)  $\frac{x}{2-x} - 1 < \frac{1-x}{2x+3}$ ;

13)  $(1-x)(2x+3) \geq (x-2)(2x+3)$ ;

14)  $\frac{2}{|x-1|+3} \leq 1$ .

7. Решите неравенство с помощью графиков:

1)  $\sqrt{x} \leq 6-x$ ;

3)  $1-\sqrt{x} > x-5$ ;

2)  $\sqrt{x+1} \geq 2x-13$ ;

4)  $\sqrt{x} > |x-2|$ .



8. Дана функция  $y = ax^2 + 2x + 1$ .

При каких значениях параметра  $a$ :

1) неравенство  $y < 0$  не имеет решений;

2) решением неравенства  $y < 0$  будет один конечный промежуток;

3) неравенство  $y < 0$  будет выполняться при всех  $x$ ;

4) решением неравенства  $y < 0$  будет объединение двух бесконечных промежутков?

## § 10

### Решение систем уравнений и неравенств с помощью графиков



#### Строим график для уравнения с двумя неизвестными

Рассмотрим примеры уравнений с двумя неизвестными:

1)  $x + y = 3$ ;

4)  $2y + x^2 = 5$ ;

2)  $x - 2y = 4$ ;

5)  $(x+1)(y-4) = 3$ ;

3)  $3x + 2y = 6$ ;

6)  $(x-1)^2 + y^2 = 2,5$ .

Такие уравнения не позволяют однозначно найти неизвестные  $x$  и  $y$ . Можно менять значения одного из них и находить соответствующие значения другого. Иными словами, на такие уравнения можно смотреть как на зависимости между переменными  $x$  и  $y$ . Эти зависимости изображаются графически на координатной плоскости  $xOy$  (рис. 90).

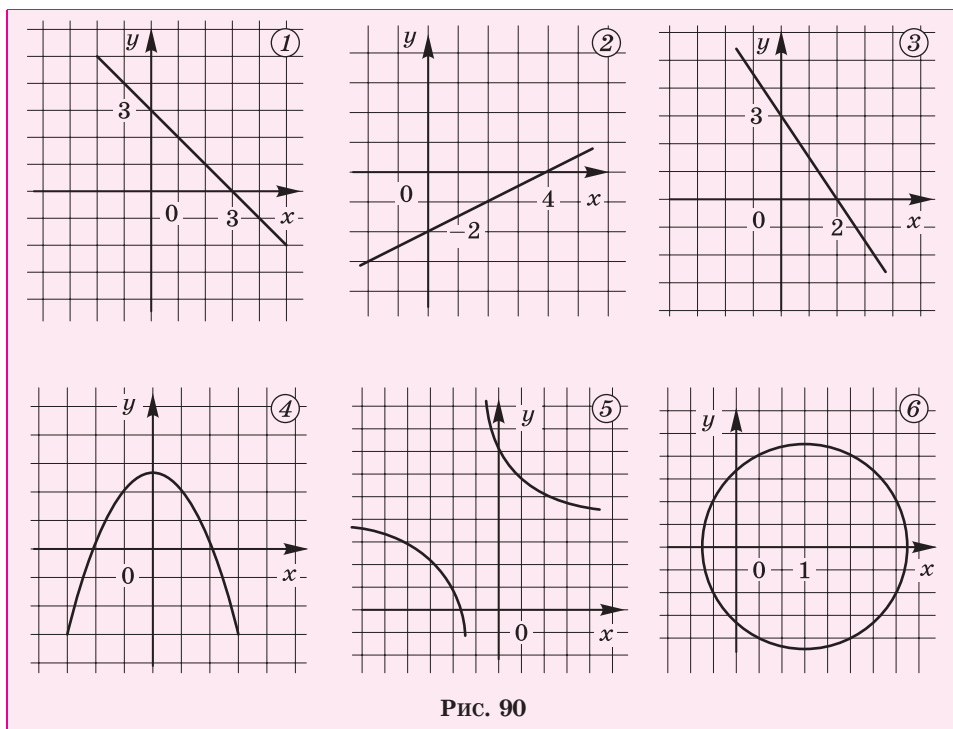


Рис. 90

Как строятся эти графики? Первые три графика — это прямые, изображающие на координатной плоскости линейную зависимость между переменными. Их можно строить по-разному. Можно выразить  $y$  как функцию от  $x$  и строить график линейной функции. Можно, зная, что графиком является прямая, однозначно определяемая двумя точками, найти две точки, лежащие на графике зависимости, например, точки, лежащие на осях координат.

Три следующих графика — это графики квадратичных зависимостей (под квадратичной зависимостью между двумя переменными в общем виде понимается зависимость  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ).

Мы знакомы с тремя простейшими типами этих зависимостей, которые графически изображаются параболлами, гиперболами и окружностями.

Характерный признак параболлы — одна переменная входит в первой степени, другая — во второй. Для построения таких парабол у нас есть техника исследования квадратичных функций — надо найти вершину параболлы, провести ее ось симметрии и разобраться, куда будут направлены ее ветви.

Характерный признак встречавшихся нам гипербол — нелинейный член зависимости является произведением переменных. Для построения

таких гипербол применима техника исследования дробно-линейных функций, которые можно привести к виду  $y = \frac{k}{x-a} + b$ . Используем простой алгоритм: через точку  $P(a; b)$  проводим две взаимно перпендикулярные прямые  $x = a$  и  $y = b$  и располагаем ветви стандартного графика обратной пропорциональности  $xy = k$  в зависимости от знака  $k$ .

Характерный признак окружности — обе переменные входят в квадратах с одинаковым коэффициентом. Выделением полных квадратов такие зависимости приводятся к виду  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ , графиками которых будут окружности с центрами  $(a; b)$  и радиусами  $R$ .



## Строим графическое изображение системы двух уравнений с двумя неизвестными

Каждое уравнение системы можно рассматривать как зависимость между двумя переменными и строить график этой зависимости. Точки пересечения двух графиков для двух уравнений системы будут иметь координаты, являющиеся решениями системы.

### Примеры

$$1. \begin{cases} 3x - y = 4, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$$

С графическим изображением решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными мы уже встречались — надо построить две прямые (рис. 91) и найти их точку пересечения (если они не параллельны).

Две прямые для нашего примера пересекаются в точке  $P(1; -1)$ . Пара чисел  $x = 1$ ;  $y = -1$  является решением системы.

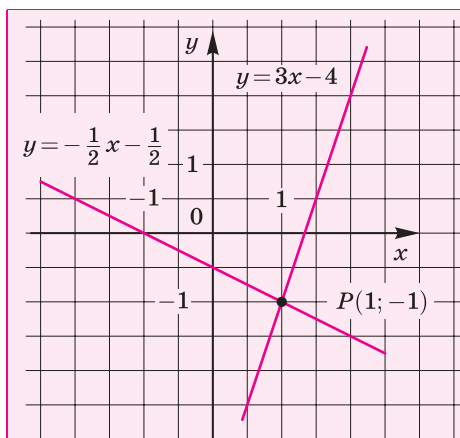


Рис. 91

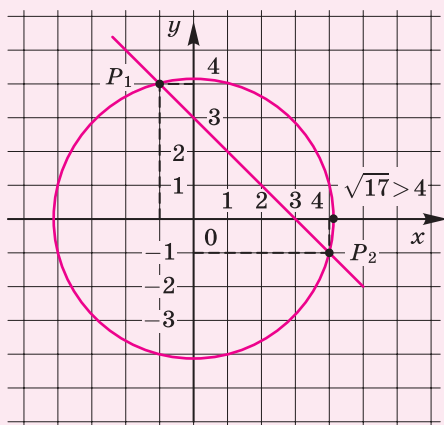


Рис. 92

$$2. \begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

Первое уравнение задает линейную зависимость, второе — квадратичную. В таких случаях надо построить график квадратичной зависимости (это может быть парабола, гипербола или окружность) и найти ее точки пересечения с прямой.

В нашем примере нелинейная зависимость  $x^2 + y^2 = 17$  является графиком окружности с центром в начале координат и с радиусом  $R = \sqrt{17}$ . Прямая  $x + y = 3$  строится легко (рис. 92).

Точки пересечения:  $P_1(-1; 4)$ ,  $P_2(4; -1)$ .

Решение системы:  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 4$ ;  $x_2 = 4$ ,  $y_2 = -1$ .

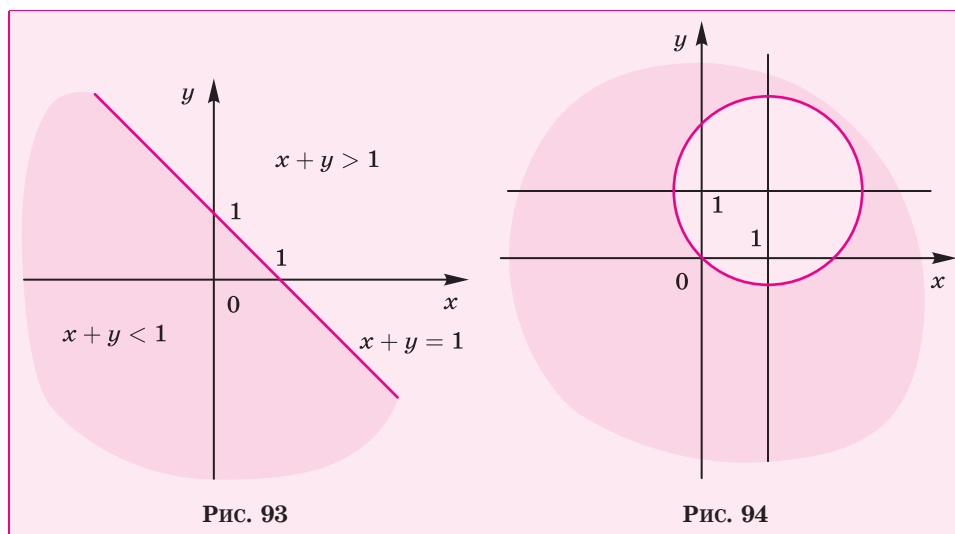
## Строим графическое изображение неравенства с двумя переменными

### Примеры

$$1. x + y < 1.$$

Если мы построим прямую  $x + y = 1$ , то она разобьет координатную плоскость на две полуплоскости. Для координат точек одной полуплоскости будет выполняться неравенство одного знака, а для точек второй полуплоскости — другого.

Разобраться в знаках нетрудно. Ясно, что при больших  $x$  и  $y$  сумма  $x + y$  будет  $> 1$ , следовательно, в той полуплоскости, куда обращены оси  $x$  и  $y$ , будет знак «больше» (рис. 93).



2.  $x^2 + y^2 > 2(x + y)$ .

Перепишем неравенство в виде  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 > 2$ .

Окружность  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$  разбивает плоскость на 2 части. Точки внутри круга имеют координаты, удовлетворяющие неравенству  $x^2 + y^2 < 2(x + y)$ , вне его — неравенству  $x^2 + y^2 > 2(x + y)$  (рис. 94).

Можно сделать вывод, что части плоскости, ограниченные известными графиками, можно задавать системами неравенств с двумя переменными.

3. Как с помощью неравенств задать точки, лежащие внутри треугольника и на его границе?

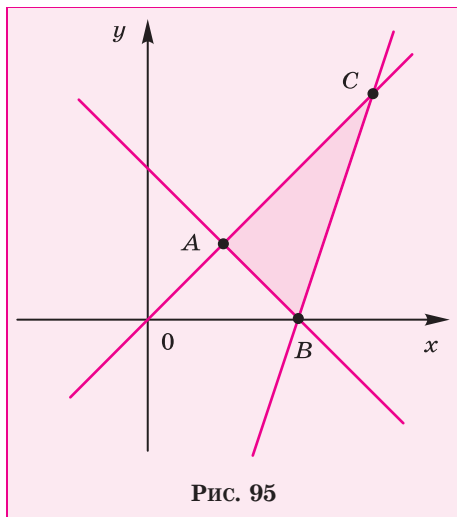


Рис. 95

Пусть вершины треугольника имеют координаты  $A(1;1)$ ,  $B(2;0)$  и  $C(3;3)$ . Найдем уравнение прямых  $AC$ ,  $AB$  и  $BC$ . Легко догадаться, каковы уравнения прямых  $AC$  и  $AB$ .

$AC: y = x.$

$AB: x + y = 2.$

Чтобы получить уравнение  $BC$ , напомним уравнение графика линейной функции  $y = ax + b$  и найдем  $a$  и  $b$ , подставив координаты точек и решив получившуюся систему:

$$\begin{cases} 0 = 2a + b, \\ 3 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -6.$$

Уравнение прямой  $BC: y = 3x - 6$ , или  $3x - y - 6 = 0$ .

Разобраться со знаками неравенств предлагаем вам самостоятельно (рис. 95).

*Ответ:* Треугольник  $ABC$  задается системой неравенств:

$$\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \geq 2, \\ 3x - y + 6 \leq 0. \end{cases}$$



## Вокруг теории

1. Как по виду квадратичной зависимости распознать характер ее графика?
2. Как графически можно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?
3. Как графически можно изобразить решения неравенства с двумя переменными?