

Производительность первого рабочего — $\frac{1}{x}$,

второго — $\frac{1}{t}$,

суммарная — $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{t}$.

Уравнения, получившиеся во всех этих задачах, приводятся к квадратным после освобождения от знаменателей и простых преобразований. Разумеется, их решение не сводится к простому применению формул корней квадратного уравнения — в каждой задаче неизвестная величина x имеет определенный смысл и не может принимать какие угодно значения (скажем, время работы не может быть отрицательным).

<http://school-collection.edu.ru>, каталог — для ученика — алгебра — 8 класс — Инновационные учебные материалы — «Алгебра в основной школе, 7–9 классы» — 8 класс:

— глава 7, пункт 5 «Задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям», 1–7,
— глава 7, задачник, рабочая тетрадь.

www

Вокруг теории



1. Придумайте задачу на движение, для решения которой нужно было бы решить уравнение $\frac{10}{x} - \frac{10}{x+2} = \frac{4}{3}$.
2. Придумайте задачу на работу, для решения которой нужно было бы решить уравнение.
3. Для решения биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ мы составляем квадратное уравнение $t^2 + pt + q = 0$. Какие корни последнего уравнения мы должны оставить, а какие отбросить?
4. Какие уравнения называются возвратными?

Задания

Решаем вместе

Не решая уравнений, указать подстановку, которая приводит данное уравнение к квадратному.

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, $x^2 = t$, $t^2 - 13t + 36 = 0$

2) $(x^2 + x + 1)^2 - 5x^2 - 5x + 1 = 0$

Видно повторяющееся выражение $x^2 + x$.

Сделаем замену: $x^2 + x + 1 = t$.

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$$3) x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$$

Выделяем полный квадрат:

$$(x^2 - 2x)^2 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x = t, \quad t^2 + t - 2 = 0$$

$$4) \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{2x^2 - 2x + 3} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - x = t$$

$$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2t+3} = \frac{2}{3}$$

Можно (и лучше) обозначить $x^2 - x + 1 = t$ и получить более простое уравнение $\frac{1}{t} - \frac{1}{2t+1} = \frac{2}{3}$.

$$5) x^4 - 2x^3 - \frac{22}{9}x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\text{Делим на } x^2: x^2 - 2x - \frac{22}{9} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad x + \frac{1}{x} = t$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 - \frac{22}{9} = 0$$

$$t^2 - 2t - \frac{40}{9} = 0$$

Умение находить нужную замену неизвестного приходит с практикой. Рекомендуем просмотреть пример, иллюстрирующий различные приемы решения одного и того же уравнения.

Решить алгебраическое уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3) = 120$ различными способами.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение четвертой степени. Общий прием решения уравнения четвертой степени нам неизвестен, поэтому не будем торопиться раскрывать скобки.

Первый способ. Воспользуемся симметрией левой части. Перемножим первый и четвертый множители, а также второй и третий. Получим $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 120$. Теперь видно, что после замены $x^2 + 3x = y$ уравнение сводится к квадратному $y(y+2) = 120$.

Второй способ. Симметрией можно воспользоваться иначе. Заметим, что числа $x, x+1, x+2, x+3$ расположены на числовой оси симметрично относительно числа $x + \frac{3}{2}$. Сделаем замену $x + \frac{3}{2} = y$. Тогда $x = y - \frac{3}{2}, x+1 = y - \frac{1}{2}, x+2 = y + \frac{1}{2}, x+3 = y + \frac{3}{2}$. Уравнение превращается в такое:

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = 120.$$

Теперь преобразования более очевидны: $\left(y^2 - \frac{9}{4}\right)\left(y^2 - \frac{1}{4}\right) = 120$.

Это биквадратное уравнение, приводящееся к квадратному заменой $y^2 = z$.

Третий способ. Перемножив все скобки, получим уравнение: $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 120 = 0$. Попробуем подобрать корень. Легко догадаться, что $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Убеждаемся, что $x = 2$ является корнем. Разделим левую часть уравнения на $x - 2$:

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 120 &= \\ &= x^4 - 2x^3 + 8x^3 - 16x^2 + 27x^2 - 54x + 60x - 120 = \\ &= (x - 2)(x^3 + 8x^2 + 27x + 60). \end{aligned}$$

Теперь подбираем корень уравнения $x^3 + 8x^2 + 27x + 60 = 0$. Можно угадать $x = -5$ (так как $(-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) = 120$). Выделим множитель $x + 5$:

$$x^3 + 5x^2 + 3x^2 + 15x + 12x + 60 = (x + 5)(x^2 + 3x + 12).$$

У оставшегося квадратного трехчлена $x^2 + 3x + 12$ действительных корней нет.

Четвертый способ. Он основан на тождестве

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2.$$

$$\text{Получаем: } (x^2 + 3x + 1)^2 = 121 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 11 \\ x^2 + 3x + 1 = -11 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

1. Решите уравнения:

1) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;

2) $x^4 - 13x^2 - 48 = 0$;

3) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$;

4) $\frac{2x^2 - 1}{x + 1} = \frac{21(x - 1)}{2x^2 + 1}$;

5) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

6) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$;

7) $(x^2 + 2x - 1)^2 + x^2 + 2x - 7 = 0$;

8) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;

9) $x^2(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 55$;

10) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$;

11) $x^4 + 4x^3 - \frac{41}{4}x^2 - 4x + 1 = 0$;

12) $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x + 5} + \frac{1}{x + 7} = \frac{25}{4}$;

