

4) Прямая, проходящая через точку M , лежащую на оси ординат, пересекает параболу $y = x^2$ в точках A и B . Докажите, что произведение абсцисс точек A и B не зависит от углового коэффициента прямой.

5) Прямые l_1 и l_2 пересекают параболу $y = x^2$ в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Докажите, что, если l_1 и l_2 параллельны, то сумма абсцисс точек A_1 и B_1 равна сумме абсцисс точек A_2 и B_2 .

Геометрические свойства гиперболы

Пусть Γ — гипербола, являющаяся графиком функции $y = \frac{1}{x}$.

1) Вершины A и C прямоугольника $ABCD$ лежат на гиперболе $xy = 1$, а стороны прямоугольника параллельны координатным осям. Докажите, что прямая BD проходит через начало координат.

2) Докажите, что гипербола $xy = 1$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, разность расстояний которых до точек $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ по модулю равна $2\sqrt{2}$. Точки F_1 и F_2 называют *фокусами гиперболы*.

3) Докажите, что гипербола Γ имеет две оси симметрии: одну, проходящую через фокусы F_1 и F_2 , другую — перпендикулярную F_1F_2 .

Приложения

Используйте результаты проектов для выполнения заданий сюжетов 4 и 5.



Проект 5. Теннисный мяч

Цель: построение математической модели механического движения и ее исследование.

Постановка задачи

Теннисный мячик сброшен с высоты $H_0 = 1,6$ м. При каждом отскоке мяч теряет половину кинетической энергии.

Требуется изучить закон движения мячика, построить его график, определить различные характеристики движения. Размером самого мячика в вычислениях можно пренебречь.

Эксперимент

Дана таблица значений высоты мячика h над поверхностью земли в зависимости от времени t . Постройте по точкам примерный график функции $h = h(t)$.

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
h	1,60	1,52	1,34	1,07	0,70	0,23	0,21	0,50	0,69	0,79	0,79	0,69	0,49

t	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40
h	0,19	0,13	0,31	0,39	0,38	0,27	0,06	0,12	0,20	0,17	0,05	0,08

Исследование движения до первого отскока:

- а) найдите скорость v_0 первого падения мяча на землю, используя равенство кинетической и потенциальной энергии в этот момент: $mgH_0 = \frac{mv_0^2}{2}$, где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$;
- б) запишите закон движения (т. е. функцию $h = h(t)$) мячика до первого отскока;
- в) используя условие потери половины кинетической энергии, вычислите скорость шарика сразу после первого удара о землю.

3. Измерение скорости при отскоках:

- а) докажите, что скорость v_1 первого отскока связана со скоростью v_0 падения мяча соотношением $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0$;
- б) выразите скорости второго, третьего и т. д. отскоков v_2, v_3, \dots через скорость v_0 . Верно ли, что v_2 вдвое меньше v_0 ;
- в) используя формулу связи между кинетической и потенциальной энергией, покажите, что при каждом отскоке высота подъема уменьшается вдвое.

Исследование закона движения:

- а) запишите закон движения между первым и вторым отскоками;
- б) покажите, что между вторым и третьим отскоками зависимость H от t такова: $H = 2,8t - 4,9t^2$;
- в) определите время между первым и вторым отскоками, вторым и третьим;
- г) найдите уравнение движения между третьим и четвертым отскоками;
- д) проверьте, что время между третьим и четвертым отскоками вдвое меньше, чем время между первым и третьим отскоками;
- е) обозначьте время между k -м и $(k+1)$ -м отскоками через T_k ; докажите, что $T_k = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{k-1}$; $T_k = \frac{1}{2} T_{k-2}$.

Обсуждение результатов:

- а) используя результаты проведенного исследования, постройте график зависимости $H = H(t)$;
- б) постройте последовательность моментов падения мяча на землю: $t_1, t_2 = t_1 + T_1, t_3 = t_2 + T_2, \dots$;
- в) каково время движения мяча до полной остановки?
- г) каким точкам на графике соответствуют моменты отскоков?

Проект 6. Уравнения и неравенства с параметром

1. Квадратичная функция

Постановка задачи

Дана функция $y = f(x, a)$, где $f(x, a) = x^2 + (a - 3)x + a$.

